第9卷 第2期
1989年5月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.9 No.2
May, 1989

环的(k, l, m, n)一根*

蔡传仁　章璞

（扬州师范学院）

Brown和McCoy在文[1]中建立了(F, Ω)-群的根理论，并由此考察了环的Brown-McCoy-根及其它一些根．根据这一方法，Szász在文[2]中引进了环的(k, l, m, n)-根，其中k, l, m, n是任意的非负整数，并证明了环的Brown-McCoy根与$(1,1,1,1)$-根，$(1,1,1,0)$-根，$(1,1,0,1)$-根和$(1,2,1,1)$-根相重合（见文[3]定理37.1），同时指出任一环均是$(0,0,0,0)$-，$(k,0,0,1)$-，$(0,l,0,1)$-，$(k,0,1,0)$-，$(0,l,1,0)$-，$(2,1,1,0)$-，$(2,1,0,1)$-和$(2,1,1,1)$-根环．本文首先证明了所有(k,l,m,n)-根均是Amitsur-Kurosh意义下的根性质，然后给出了所有(k, l, m, n)-根的上根构造，从而完全刻划了这种类型的根．因此Szász的上述结果均是本文定理的特殊情形．最后本文证明了环上全矩阵环的(k, l, m, n)-根与环的(k,l,m,n)-根上的全矩阵环重合．

本文中环均指结合环，设A是环，在A中记$a\circ b=a+b-ab$，$a^{(0)}=0$，$a^{(1)}=a$，$a^{(k+1)}=a^{(k)}\circ a$．易知$a\circ 0=0\circ a=a$，$\forall a\in A$．若A含有单位元e，则$a\circ e=e\circ a=e$，$\forall a\in A$．

设(k,l,m,n)是给定的非负整数，为简便起见，将这个四元数组记作$\mathbf{F}$．对于任一环A的每个元素a，记$\mathbf{F}(a)$为A的所有形如$(k\cdot a^{(l)}-a^{(m)}\circ x\circ a^{(n)})$的主理想的和，其中$x$取遍A的元素．如果$a\in\mathbf{F}(a)$，则称$a$为A的$\mathbf{F}$-正则元．A的理想I称为$\mathbf{F}$-正则理想，如果I中每个元均是$\mathbf{F}$-正则元．由文[3]知，每个环A都含有一个最大$\mathbf{F}$-正则理想$\mathbf{F}(A)$，称为环A的$\mathbf{F}$-根，它包含A的任一$\mathbf{F}$-正则理想，并且$\mathbf{F}(A/\mathbf{F}(A))=(0)$．如果$\mathbf{F}(A)=A$，则称A为$\mathbf{F}$-根环；如果$\mathbf{F}(A)=(0)$，则称A为$\mathbf{F}$-半单环．易知$\mathbf{F}$-根环的同态象仍是$\mathbf{F}$-根环．称A为$\mathbf{F}$-本原环，如果A是$\mathbf{F}$-半单的次直不可约环．记$\mathbf{K}$为所有$\mathbf{F}$-本原环作成的环类，文[3]指出，每个$\mathbf{F}$-半单环都可表示成$\mathbf{K}$中环的次直和．实际上，由文[3]定理36.5及36.6容易知道$\mathbf{F}(A)$恰为A的满足条件$A/I_a\in\mathbf{K}$的所有理想I_a的交．

定理1　设环A是$\mathbf{F}$-本原环，则A是有单位元e的单环．若A中元素a不是$\mathbf{F}$-正则元，则$a^{(s)}=e$，其中$s=\max\{m, n\}$，并且$ka^{(l)}=e$．

证　由$\mathbf{F}$-本原环的定义，A是$\mathbf{F}$-半单的次直不可约环．记A的心为H，则H不是$\mathbf{F}$-正则理想．因而存在$a\in H$，$a\neq 0$使得$a\notin\mathbf{F}(a)$，而$\mathbf{F}(a)$是A的理想，故$\mathbf{F}(a)=(0)$，因此

$$ka^{(l)}=a^{(m)}\circ x\circ a^{(n)},\quad \forall x\in A, \tag{1}$$

* 1987年1月12日收到．

取 $x=0$ 即得：

$$ka^{(l)}=a^{(m+n)} \tag{2}$$

因而有 $a^{(m)}\circ x\circ a^{(n)}=a^{(m+n)}$ ，$\forall x\in \mathrm{A}$，于是

$$x=a^{(m)}x+xa^{(n)}-a^{(m)}xa^{(n)}\in \mathrm{H}^2\ ,\quad \forall x\in \mathrm{A} \tag{3}$$

因而 $\mathrm{A}=\mathrm{H}^2=\mathrm{H}$ 是单环.

（3）式亦可写成 $(1-a^{(m)})\mathrm{A}(1-a^{(n)})=(1-a^{(m)})\mathrm{A}\cdot\mathrm{A}(1-a^{(n)})=(0)$，这里1是运算符号。由于A是单环，即得 $(1-a^{(m)})\mathrm{A}=(0)$ 或 $\mathrm{A}(1-a^{(n)})=(0)$．若 $(1-a^{(m)})\mathrm{A}=(0)$ 则 $x-a^{(m)}x=0$，即$a^{(m)}$是A的右单位元．亦有 $\mathrm{A}(1-a^{(m)})\mathrm{A}=(0)$，从而$\mathrm{A}(1-a^{(m)})=(0)$，即$a^{(m)}$也是A的左单位元．若$\mathrm{A}(1-a^{(n)})=(0)$，同理可得$a^{(n)}$是A的单位元．故A是有单位元e的单环．若 $a^{(m)}=\mathrm{e}$，$m<n$，则有 $a^{(n)}=a^{(m)}\circ a^{(n-m)}=\mathrm{e}\circ a^{(n-m)}=\mathrm{e}$．由（2）式 $ka^{(l)}=a^{(m+n)}=a^{(m)}\circ a^{(n)}=\mathrm{e}$．因而命题得证．

定理 2　F-根是 Amitsur-Kurosh 意义下的根性质。，并且是特殊根．

证　设K是所有F-本原环作成的环类．首先证明K是特殊类．由于K中环都是有单位元的单环，故都是素环，并且K是遗传类．设环A含有理想 I，$\mathrm{I}\in \mathrm{K}$，即 I 是有单位元 e 的单环．记I^*是 I 在A中的双侧零化子，则 $\mathrm{I}\cap\mathrm{I}^*=(0)$．$\forall a\in \mathrm{A}$，$\forall x\in \mathrm{I}$，有 $(a-a\mathrm{e})x=ax-a\mathrm{e}x=ax-ax=0$, $x(a-a\mathrm{e})=xa-(xa)\mathrm{e}=xa-xa=0$,即 $a-a\mathrm{e}\in\mathrm{I}^*$，故 $a=a\mathrm{e}+(a-a\mathrm{e})\in\mathrm{I}+\mathrm{I}^*$，即 $\mathrm{A}=\mathrm{I}\oplus\mathrm{I}^*$，$\mathrm{A}/\mathrm{I}^*\cong\mathrm{I}\in\mathrm{K}$，故K为特殊类．

设R为K确定的上根性质，则 $\mathrm{R}(\mathrm{A})=\bigcap\limits_{\mathrm{A}/\mathrm{I}_a\in \mathrm{K}}\mathrm{I}_a$，这表明对于任一环A均有 $\mathrm{R}(\mathrm{A})=\mathrm{F}(\mathrm{A})$ 即F-根与R-根重合，因此 F-根是Amitsur-Kurosh意义下的根性质，且为特殊根．

推论 1　设G(A)是环A的Brown-McCoy根，则有 $\mathrm{G}(\mathrm{A})\subseteq \mathrm{F}(\mathrm{A})$．

证　F-根是由F-本原环类确定的上根，而F-本原环是G-半单环，由上根的构造即得 $\mathrm{G}<\mathrm{F}$，故 $\mathrm{G}(\mathrm{A})\subseteq\mathrm{F}(\mathrm{A})$．

引理 1　设A是单环，则加群A的所有非零元有相同的阶，且当它们的阶有限时，其阶必为素数．

证　如果加群A中存在有限阶非零元，设m是所有非零元的最小阶数．若m不是素数，则有$m=m_1m_2$，其中m_1和m_2是m的真因子．设a是m阶元，故$m_2a\neq 0$,但 $m_1(m_2a)=ma=0$ 意味着非零元 m_2a 的阶小于或等于m_1，这与m的极小性不合，故m是素数．令 $\mathrm{I}=\{x\in \mathrm{A}/mx=0\}$，易知 I 是A的非零理想，因此 $\mathrm{A}=\mathrm{I}$，证毕．

设A是单环，如果加群A中每个非零元都是无限阶元，则称A的特征为0，如果A中每个非零元都是p阶元（p是一个固定的素数），则称A的特征为p．

引理 2　设I 是一个指标集，对每个$a\in \mathrm{I}$，K_a是环的一个遗传类，$\mathrm{K}=\bigcup\limits_{a\in \mathrm{I}}\mathrm{K}_a$，$\mathrm{R}_a$是由$\mathrm{K}_a$确定的上根，R是由K确定的上根，则 $\mathrm{R}=\bigcap\limits_{a\in \mathrm{I}}\mathrm{R}_a$

证　设A是R-环，由于K也是遗传类，A在K中没有非零同态象，从而在每个K_a中也没有非零同态象，因为K_a也是遗传类，故A是R_a-环，$\forall a\in\mathrm{I}$．反之，如果A是R_a-环，$\forall a\in \mathrm{I}$，同理可知A是R-环，从而$\mathrm{R}=\bigcap\limits_{a\in \mathrm{I}}\mathrm{R}_a$ ．

定理 3　设（k, l, m, n）是非负整数组成的四元数组，则

（1）　当$kl(m+n)=0$或$k=2$时，每个环均是(k,l,m,n)-根环；

（2）　当$k=1, l(m+n)\neq 0$时，(k,l,m,n)-根与Brown-McCoy根相重合；

（3）　当$k\geqslant 3, l(m+n)\neq 0$时，$(k,l,m,n)$-根$=\bigcap\limits_{p/(k-1)}\mathbf{R}_p$，这里$p$是素数，$\mathbf{R}_p$是由所有特征为$p$的有单位元的单环环类确定的上根．

证　仍将(k,l,m,n)记作$\mathbf{F}$．

当$kl(m+n)=0$时，设A是有单位元e的单环，如果A是$\mathbf{F}$-本原环，则A中含有元素a，a不是$\mathbf{F}$-正则元．由定理1可知$e=a^{(m+n)}=ka^{(l)}=0$,这是因为$a^{(0)}=0$,但$e\neq 0$. 这表明这种情形下不存在$\mathbf{F}$-本原环，因而每个环都是$\mathbf{F}$-根环．

当$k=1, l(m+n)\neq 0$时,设A是任一有单位元e的单环，由于$e\circ x=x\circ e=e$，$\forall x\in A$，并且$l\neq 0$，m和n不同时为零，故$ke^{(l)}-e^{(m)}\circ x\circ e^{(n)}=e-e=0$，$\forall x\in A$，因而$\mathbf{F}(e)=0$，$e\notin \mathbf{F}(e)$，e不是$\mathbf{F}$-正则元，于是A是$\mathbf{F}$-半单的，从而是$\mathbf{F}$-本原环．由定理1，每个$\mathbf{F}$-本原环都是有单位元的单环，因而$\mathbf{F}$-根与Brown-McCoy根相重合．

当$k\geqslant 2$，$l(m+n)\neq 0$时，如果存在$\mathbf{F}$-本原环A，设$a\in A$，a不是$\mathbf{F}$-正则元，由定理1 $ka^{(l)}=e$，e是A的单位元，且存在最小正整数s使$a^{(s)}=e$．如果$l\geqslant s$，则$e=ka^{(l)}=k(a^{(s)}\circ a^{(l-s)})=ke$，即

$$(k-1)e=0 \tag{4}$$

如果$l<s$，由s的极小性知$a^{(s-l)}\neq e$，此时有$ke=ka^{(s)}=ka^{(l)}+ka^{(s-l)}-ka^{(l)}a^{(s-l)}=e+ka^{(s-l)}-a^{(s-l)}$，即有

$$(k-1)(e-a^{(s-l)})=0 \tag{5}$$

注意到e和$e-a^{(s-l)}$均为非零元，因而当$k=2$时，(4)式与(5)式均不能成立，这意味着此时不存在$\mathbf{F}$-本原环，故每个环都是$\mathbf{F}$-根环．而当$k\geqslant 3$时，(4)式与(5)式表明单环A的特征p整除$k-1$．

下设$k\geqslant 3$, $l(m+n)\neq 0$, 设A是特征为p的有单位元e的单环，p是整除$k-1$的素数，故有$ke=e$，从而$ke^{(l)}-e^{(m)}\circ x\circ e^{(n)}=ke-e=0$, $\forall x\in A$，因而$\mathbf{F}(e)=0$, $e\notin \mathbf{F}(e)$，e不是$\mathbf{F}$-正则元，故A是$\mathbf{F}$-半单环，于是A是$\mathbf{F}$-本原环．设$\mathbf{K}$是由所有特征整除$k-1$的有单位元的单环作成的类，则$\mathbf{F}$-根是由$\mathbf{K}$确定的上根．由引理2，$\mathbf{F}$-根$=\bigcap\limits_{p/(k-1)}\mathbf{R}_p$．

由上述证明可以看出：当$k=1, l(m+n)\neq 0$时，在每个有单位元e的单环中，e不是$\mathbf{F}$-正则元；当$k\geqslant 3$时，在每个特征为p的有单位元e的单环中，e不是$\mathbf{F}$-正则元．因而有

推论2　设A是有单位元e的单环，则A是$\mathbf{F}$-本原环，当且仅当e不是$\mathbf{F}$-正则元．

推论3　设$l(m+n)\neq 0$, 则(k,l,m,n)-根由k唯一确定．

证　由定理3立即可得．

推论4　设$k\geqslant 3$, $l(m+n)\neq 0$, A是$\mathbf{F}$-半单环，则A有理想的直和分解使得每个直和项是某个$\mathbf{R}_{p_a}$-半单环，其中$p_a/(k-1)$，p_a是素数．

证　A是特征整除$k-1$的单环的次直和，故$(k-1)A=(0)$，从而加群A是有限个Sylow子群的直和．设I_a是加群A的Sylow p_a-子群，其中p_a是整除$k-1$的一个素数．易知I_a是A的理想，从而I_a也是$\mathbf{F}$-半单环，I_a是特征整除$k-1$的单环的次直和，而$p_aI_a=(0)$，因此I_a的每个次直被加项的特征均为p_a．故I_a是$\mathbf{R}_{p_a}$-半单环．

下面讨论全矩阵环的(k,l,m,n)-根．

引理3 仍记$\mathbf{F}$是(k,l,m,n)-根，设A是环，则$(k-1)A\subseteq \mathbf{F}(A)$；特别地，当A是$\mathbf{F}$-半单环，则$(k-1)A=(0)$．又设$(k-1)A=(0)$且$l(m+n)\neq 0$，则$\mathbf{F}(A)=\mathbf{G}(A)$，其中$\mathbf{G}$表示Brown-McCoy根．

证 当$kl(m+n)=0$或$k\leqslant 2$时，显然有$(k-1)A\subseteq \mathbf{F}(A)$．故设$k\geqslant 3, l(m+n)\neq 0$，设$\bar{A}=A/\mathbf{F}(A)$，$\bar{A}$是$\mathbf{F}$-半单环，故是特征整除$k-1$的有单位元单环的次直和，从而$(k-1)\bar{A}=(0)$，即$(k-1)A\subseteq \mathbf{F}(A)$．

设$(k-1)A=(0)$，$l(m+n)\neq 0$. 当$k=0,1,2$时，显然有$\mathbf{F}(A)=\mathbf{G}(A)$．下设$k\geqslant 3$. 记$\bar{A}=A/\mathbf{G}(A)$，则$\bar{A}$是有单位元单环的次直和，又由于$(k-1)\bar{A}=(0)$，因而作为次直被加项的这些单环的特征整除$k-1$，故$\bar{A}$是$\mathbf{F}$-半单环，$\mathbf{F}(A)\subseteq \mathbf{G}(A)$，从而$\mathbf{F}(A)=\mathbf{G}(A)$．

引理4 设A是$\mathbf{F}$-根环，则A上$t\times t$全矩阵环A_t也是$\mathbf{F}$-根环．

证 当$kl(m+n)=0$或$k=2$时，每个环均是$\mathbf{F}$-根环，命题平凡地成立．当$k=1, l(m+n)\neq 0$时，$\mathbf{F}=\mathbf{G}$，由文[3]定理§38.7可知命题成立．下设$k\geqslant 3$，$l(m+n)\neq 0$，由引理3可知，$(k-1)A_t\subseteq \mathbf{F}(A_t)$ 因为$\mathbf{F}$-根是遗传根，故$(k-1)A_t$是$\mathbf{F}$-根环．设$\bar{A}=A/(k-1)A$ 则$\bar{A}$是$\mathbf{F}$-环，且$(k-1)\bar{A}=(0)$．由引理3知，$\bar{A}$是$\mathbf{G}$-环．由文[3]定理38.7，$(\bar{A})_t$是$\mathbf{G}$-环，从而是$\mathbf{F}$-环．而$A_t/(k-1)A_t\cong(\bar{A})_t$，故$A_t$是$\mathbf{F}$-环．

定理4 设$\mathbf{F}$是(k,l,m,n)-根，A是环，A_t是A上$t\times t$全矩阵环，则$\mathbf{F}(A_t)=(\mathbf{F}(A))_t$

证 仅要考虑$k\geqslant 3$，$l(m+n)\neq 0$的情形．由引理4知$(\mathbf{F}(A))_t\subseteq \mathbf{F}(A_t)$．现设$\bar{A}=A/\mathbf{F}(A)$，则$\bar{A}$是$\mathbf{F}$-半单环，从而是$\mathbf{G}$-半单环且$(k-1)\bar{A}=(0)$，由文[3]定理38.7知$(\bar{A})_t$也是$\mathbf{G}$-半单环且$(k-1)(\bar{A})_t=(0)$，由引理3即得$(\bar{A})_t$是$\mathbf{F}$-半单环，而$(\bar{A})_t\cong A_t/(\mathbf{F}(A))_t$，故$\mathbf{F}(A_t)\subseteq(\mathbf{F}(A))_t$，从而$\mathbf{F}(A_t)=(\mathbf{F}(A))_t$．

参 考 文 献

[1] Brown, B.—McCoy, N. H. Some theorems on groups with applications to ring theory, Trans. Amer. Math. Soc. 69(1950). 302—311.

[2] Szász, F. A. An observation on the Brown McCoy radical, Proc. Japan Acad. 37(1961), 413—416.

[3] Szász, F. A. Radicals of Rings, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1981.

The (k,l,m,n)-radical of rings

Cai Chuanren　　Zhang Pu

(Yangzhou Teachers College)

Abstract

The concept of the (k,l,m,n)-radical was sintroduced by Szasz in [2]. In this paper, it is proved that the (k,l,m,n)-radical is a radical in the sense of Amitsur and Kurosh. and the structure of the (k,l,m,n)-radical is given with the method of constructing upper radicals, for every quadruple of non-negative integers, k,l,m,n. As a corollary of the theorem in this paper, Szasz's results in [3] are immediately derived. It is also proved that the (k,l,m,n)-radical of the full matrix ring over a ring A coincides with the full matrix ring over the (k,l,m,n)-radical of ring A.