第9卷 第2期 1989年5月
数学研究与评论 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.9 No.2 May, 1989

某些黎曼流形中的全脐子流形*

宣满友

(南昌陆军学院)

对于共形曲率张量满足关系式$\widetilde{\nabla}_\varepsilon\widetilde{C}_{\lambda\mu\nu\omega}=\varphi_\varepsilon\widetilde{C}_{\lambda\mu\nu\omega}$(其中$\varphi_\varepsilon$是某一共变向量的支量)的黎曼流形中的全脐子流形，在文[1]、[2]中已作了深入的研究．本文在于改进[2]中的主要结果，并以此来研究上述黎曼流形中平均曲率为零的全脐子流形，所得结果加强了[1]、[2]中的有关结论．

文中所用符号同[3]，且基本形式不限于是正定的．

§1 预备知识

设M是n维黎曼流形N中的m维浸入子流形，若N为坐标邻域$\{V;u^\lambda\}$所覆盖，M为坐标邻域$\{U,x^h\}$所覆盖(λ、μ、ν的取值范围为$1,\cdots,n$；i,j,k的取值范围为$1,\cdots,m$且$n>m>3$)．在局部坐标下M可表示为

$$u^\lambda=u^\lambda(x^h). \tag{1}$$

设X、Y、Z、W是M中的向量场，其局部表示式为$X=X^h\partial_h$，其中$\partial_h=\partial/x^h$，由于X也是N中的向量场，它在N中的局部表示式为$X=B_h^\lambda X^h\partial_\lambda$，其中$B_h^\lambda=\partial u^\lambda/\partial x^h$，$\partial_\lambda=\partial/\partial u^\lambda$．我们用$\widetilde{g}$表示$N$的黎曼度量，用$g$表示子流形$M$的黎曼度量，则

$$g(X,Y)=\widetilde{g}(X,Y).$$

由于

$$g=g_{ji}dx^jdx^i,\quad \widetilde{g}=\widetilde{g}_{\mu\lambda}du^\mu du^\lambda,$$

所以

$$g_{ji}=\widetilde{g}_{\mu\lambda}B_j^\mu B_i^\lambda \tag{2}$$

设$\widetilde{\nabla}$为定义在N中关于黎曼度量$\widetilde{g}$的黎曼联络，∇为定义在子流形M上关于g的黎曼联络．若X、Y为M中的两个向量场。则

$$\widetilde{\nabla}_XY=\nabla_XY+h(X,Y) \tag{3}$$

其中∇_XY是M的切向量场，$h(X,Y)$是M的法向量场．设ξ是M的一个法向量场，X是M的的一个切向量场，则

$$\widetilde{\nabla}_X\xi=-(A_\xi(X))+\nabla_X^\perp\xi \tag{4}$$

这里$-A_\xi(X)$和$\nabla_X^\perp\xi$分别表示$\widetilde{\nabla}_X\xi$的切向量与法支量．以$T^\perp(M)$表示M在N中的所有法向

* 1987年5月20日收到．

量的向量丛，$\xi_a(a=1,\cdots,n-m)$是法空间$T^{\perp}(M)$的一个正交基，h^a表示相应的第二基本形式，于是

$$h(X,Y)=h^a(X,Y)\xi_a.$$

若M是N中的全脐子流形，即

$$A_{\xi_a}=\lambda_a I \tag{5}$$

其中I为恒等变换，λ_a是纯量函数．用H表示M在点$p\in M$的平均曲率向量，即

$$H=\sum_{a=1}^{n-m}e_a\lambda_a\xi_a \tag{6}$$

$$|H|^2=|\tilde{g}(H,H)|=\left|\sum_{a=1}^{n-m}e_a\lambda_a^2\right| \tag{7}$$

其中$e_a=\tilde{g}(\xi_a,\xi_a)=\pm1$．由于对于全脐子流形有

$$h^a(X,Y)=e_a\lambda_a g(X,Y),$$
$$h(X,Y)=g(X,Y)H,$$

所以Ganss方程为

$$\tilde{K}(X,Y;Z,W)=K(X,Y;Z,W)+\tilde{g}(H,H)[g(X,Z)g(Y,W)-g(X,W)g(Y,Z)] \tag{8}$$

Codazzi方程为

$$\begin{aligned}&\tilde{K}(X,Y;Z,\xi_\sigma)\\&=(\nabla_X\lambda_\sigma)g(Y,Z)-(\nabla_Y\lambda_\sigma)g(X,Z)+\sum_a[\lambda_a g(Y,Z)\tilde{g}(\nabla^{\perp}_X\xi_a,\xi_\sigma)\\&\quad-\lambda_a g(X,Z)\tilde{g}(\nabla^{\perp}_Y\xi_a,\xi_\sigma)],\quad(a,\sigma=1,2,\cdots,n-m).\end{aligned} \tag{9}$$

记

$$\tilde{L}(\tilde{X},\tilde{Y})=-\frac{1}{n-2}\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y})+\frac{\tilde{r}}{2(n-1)(n-2)}\tilde{g}(\tilde{X},\tilde{Y}). \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\tilde{C}(\tilde{X},\tilde{Y};\tilde{Z},\tilde{W})&=\tilde{K}(\tilde{X},\tilde{Y};\tilde{Z},\tilde{W})+\tilde{L}(\tilde{Y},\tilde{Z})\tilde{g}(\tilde{X},\tilde{W})\\&-\tilde{L}(\tilde{X},\tilde{Z})\tilde{g}(\tilde{Y},\tilde{W})+\tilde{g}(\tilde{Y},\tilde{Z})\tilde{L}(\tilde{X},\tilde{W})-\tilde{g}(\tilde{X},\tilde{Z})\tilde{L}(\tilde{Y},\tilde{W})\end{aligned} \tag{11}$$

其中$\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{W}$是N中的任意向量场，$\tilde{r}$是N的数量曲率，$\tilde{C}$是N的共形曲率张量．

§2 主 要 结 果

设M是黎曼流形N中的全脐子流形，由于M是全脐的，所以(3)、(4)分别简化为

$$\tilde{\nabla}_XY=\nabla_XY+g(X,Y)H, \tag{12}$$

$$\tilde{\nabla}_X\xi_\sigma=-\lambda_\sigma X+\nabla^{\perp}_X\xi_\sigma\quad. \tag{13}$$

我们有如下的

定理 设M是黎曼流形N中的全脐子流形，如果对于M中的任何向量场X和某个一次形式ω，N的共形曲率张量满足条件：$\tilde{\nabla}_X\tilde{C}=\omega(X)\tilde{C}$，则$M$是共形平坦或全测地的．

证 设X、Y、Z、T是M中任意的四个相互正交的向量场，则由Ganss方程(8)和Codazzi方程(9)得

$$\tilde{K}(X,Y;Z,Y)=K(X,Y;Z,T); \tag{14}$$

$$\tilde{K}(X,Y;Z,\xi_\sigma)=0,\quad(\sigma=1,2,\cdots,n-m). \tag{15}$$

由（12）得

$$\widetilde{\nabla}_T X = \nabla_T X, \tag{16}$$

由（11）、（15）得

$$\widetilde{C}(X, Y; Z, \xi_\sigma) = 0, \quad (\sigma = 1, 2, \cdots, n-m). \tag{17}$$

（17）两边关于 g 求共变微分并利用（13）、（16）得

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla_T \widetilde{C}(X, Y; Z, \xi_\sigma) = \widetilde{\nabla}_T \widetilde{C}(X, Y; Z, \xi_\sigma) \\
&= (\widetilde{\nabla}_T \widetilde{C})(X, Y; Z, \xi_\sigma) + \widetilde{C}(\widetilde{\nabla}_T X, Y; Z, \xi_\sigma) \\
&\quad + \widetilde{C}(X, \widetilde{\nabla}_T Y; Z, \xi_\sigma) + \widetilde{C}(X, Y; \widetilde{\nabla}_T Z, \xi_\sigma) + \widetilde{C}(X, Y; Z, \widetilde{\nabla}_T \xi_\sigma) \\
&= (\widetilde{\nabla}_T \widetilde{C})(X, Y; Z, \xi_\sigma) + \widetilde{C}(\nabla_T X, Y; Z, \xi_\sigma) \\
&\quad + \widetilde{C}(X, \nabla_T Y; Z, \xi_\sigma) + \widetilde{C}(X, Y; \nabla_T Z, \xi_\sigma) \\
&\quad + \widetilde{C}(X, Y; Z, -\lambda_\sigma T) + \widetilde{C}(X, Y; Z, \nabla^{\perp}_T \xi_\sigma).
\end{aligned} \tag{18}$$

由于N的共形曲率张量满足定理条件，同时利用（11）、（15）、（17）由（18）得

$$\begin{aligned}
\lambda_\sigma \widetilde{C}(X, Y; Z, T) &= \omega(T)\widetilde{C}(X, Y; Z, \xi_\sigma) \\
&\quad + \widetilde{K}(\nabla_T X, Y; Z, \xi_\sigma) - \widetilde{g}(\nabla_T X, Z)\widetilde{L}(Y, \xi_\sigma) \\
&\quad + \widetilde{K}(X, \nabla_T Y; Z, \xi_\sigma) + \widetilde{g}(\nabla_T Y, Z)\widetilde{L}(X, \xi_\sigma) \\
&\quad + \widetilde{K}(X, Y; \nabla_T Z, \xi_\sigma) + \widetilde{g}(Y, \nabla_T Z)\widetilde{L}(X, \xi_\sigma) \\
&\quad - \widetilde{g}(X, \nabla_T Z)\widetilde{L}(Y, \xi_\sigma) + \widetilde{K}(X, Y; Z, \nabla^{\perp}_T \xi_\sigma) \\
&= \widetilde{K}(\nabla_T X, Y; Z, \xi_\sigma) + \widetilde{K}(X, \nabla_T Y; Z, \xi_\sigma) + \widetilde{K}(X, Y; \nabla_T Z, \xi_\sigma).
\end{aligned} \tag{19}$$

由于

$$g(\nabla_T X, Z) + g(X, \nabla_T Z) = 0,$$

所以利用（9）、（11）由（19）得

$$\begin{aligned}
\lambda_\sigma \widetilde{K}(X, Y; Z, T) &= -(\nabla_Y \lambda_\sigma) g(\nabla_T X, Z) - \sum_a \lambda_a g(\nabla_T X, Z)\widetilde{g}(\nabla^{\perp}_Y \xi_a, \xi_\sigma) \\
&\quad + (\nabla_X \lambda_\sigma) g(\nabla_T Y, Z) + \sum_a \lambda_a g(\nabla_T Y, Z)\widetilde{g}(\nabla^{\perp}_X \xi_a, \xi_\sigma) \\
&\quad + (\nabla_X \lambda_\sigma) g(Y, \nabla_T Z) - (\nabla_Y \lambda_\sigma) g(X, \nabla_T Z) \\
&\quad + \sum_a [\lambda_a g(Y, \nabla_T Z)\widetilde{g}(\nabla^{\perp}_X \xi_a, \xi_\sigma) \\
&\quad - \lambda_a g(X, \nabla_T Z)\widetilde{g}(\nabla^{\perp}_Y \xi_a, \xi_\sigma)] = 0
\end{aligned} \tag{20}$$

由（14）、（20）得

$$\lambda_\sigma K(X, Y; Z, T) = 0, \quad (\sigma = 1, 2, \cdots, n-m). \tag{21}$$

（21）表明如下两式成立：

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-m} = 0, \tag{22}$$

或

$$K(X, Y; Z, T) = 0. \tag{23}$$

如果（22）成立，则M是全测地子流形．否则（23）成立，由于X，Y，Z，T是M中任意的相互正交的向量场，所以由Schouten定理[4]可知，M是共形平坦子流形．证毕．

用C表示子流形M的共形曲率张量，由于定理的结论可统一写成：$\lambda_\sigma C = 0$ $(\sigma = 1, 2, \cdots, n-m)$，所以有$\left(\sum_{\sigma=1}^{n-m} e_\sigma \lambda_\sigma^2\right) C = 0$，即 $|H|^2 C = 0$，由此可得［2］中的主要结果：

定理A 设V_m是共形曲率张量满足$\widetilde{\nabla}_\varepsilon \widetilde{C}_{\lambda\mu\nu\omega} = \varphi_\varepsilon \widetilde{C}_{\lambda\mu\nu\omega}$($\varphi_\varepsilon$是某一共变向量的支量)的黎曼空间$V_n$中的全脐子流形，则对于$V_m$，关系式 $|H|^2 C_{hijk} = 0$ 成立.

若V_n满足定理A的条件，则对于V_n中的任何向量场$\widetilde{X}$，有$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{C} = \varphi(\widetilde{X})\widetilde{C}$. 而本文定理中的$X$仅限于在$M$之中，所以条件变弱.

由定理可以得到如下的

推论 设M是共形循环或共形对称黎曼流形中的全脐子流形，当 $|H| = 0$ 时，M是共形平坦或全测地的.

而[1]中的相应结论为

定理B 设V_m是共形对称空间中的全脐子流形，当平均曲率 $|H| = 0$时，V_m是共形对称的([1]，定理1).

定理C 设V_m是共形循环空间V_n中的全脐子流形，当平均曲率 $|H| = 0$时，如果φ_ε与V_m不正交，则V_m是共形循环空间([1]，定理2)，如果φ_ε与V_n正支，则V_m是共形对称空间([1]，定理3).

参 考 文 献

[1] Z. Olszak, On totally umbilical surfaces immersed in Riemannian conformally recurrent and conformally symmetric spaces, Demonstratio Mathematics 8(1975), 303—311.

[2] Z. Olszak, On totally umbilical surfaces in some Riemannian spaces. Colloguium Math. 37(1977), 105—111.

[3] Bang-yen Chen, Geometry of submanifolds, 1973.

[4] Eisenhart, L, P., Riemannian Geometry. Princeton, 1966.

On Totally Umbilical Submanifolds in Some Riemannian Manifolds

Xuan Manyou

Abstract

The main result obtaind in this paper is that:

Let M be a totally umbilical submanifolds in Riemannian manifold N. If the Weyl conformal curvature tensor for N satisfies the following condition: $\widetilde{\nabla}_X \widetilde{C} = \omega(X)\widetilde{C}$, for some 1-form ω and any vector field X in M, then M is conformally flat or it is totally geodesic.