第9卷 第2期
1989年5月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.9 No.2
May, 1989

关于“具人工粘性项的2守恒律组的有限差分格式”一文的注记*

郑永树

（华侨大学，泉州）

考虑一维带粘性项的等熵气流动力学方程组：

$$\begin{cases} u_t + p(v)_x = \mathrm{d}u_{xx}, \\ v_t - u_x = \mathrm{d}v_{xx}, \end{cases} \quad (x,t)\in(0,L)\times(0,\infty) \tag{E}$$

带有初始条件

$$u(x,0)=u_0(x),\ v(x,0)=v_0(x),\ x\in(0,L) \tag{I}$$

和边界条件

$$u(x,t)=0,\ v(x,t)=v_b>0,\ x=0,L,\ t\geqslant 0 \tag{B}$$

其中 $v_0(x)\geqslant c>0$，v_b 为常数，且 $v_b\geqslant c$．此外，$u_0(x)$，$v_0(x)$ 是光滑的有界函数，并满足边界条件（B）和 $\int_0^L\{u_0^2(x)+v_0^2(x)+[u_0'(x)]^2+[v_0'(x)]^2\}\mathrm{d}x<\infty$

如果 $d=0$，方程组（E）描述一维等熵气流运动，其中 u 是气流速度，$\frac{1}{v}$ 为密度，而 $p(v)$ 为压力．当 $d>0$ 时，人工粘性项将起着对间断的光滑化的效应．

假设

$$d>0,\ p'(v)<0,\ p''(v)>0 \quad (v>0) \tag{1}$$

在文[1]中，Kanel 证明了初边值问题（E）、(I)、(B)存在整体光滑解．尔后，D.Hoff [2] 提出用隐式的有限差分格式进行求解．但是，他在证明近似解的界时，附加假设条件

$$\lim_{v\to\infty} v^3|p'(v)|=\infty. \tag{2}$$

显然，条件（2）将排除很大一部分的等熵气流．譬如，对于多方气体，即 $p(v)=k^2v^{-\gamma}$ $(k>0,\ 1<\gamma\leqslant 3)$

$$\lim_{v\to\infty} v^3|p'(v)|=\infty \Leftrightarrow 1<\gamma<2.$$

这个注记的目的，就是解除限制条件（2），使得文[2]§3、§4的结果对于满足假设条件（1）的等熵气流是有效的．

为解除附加假设条件（2），本文主要将文[2]§3的引理1和引理2分别修改为下面的

* 1987年5月25日收到．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

引理 1 和引理 2 .

设 $E^n=\frac{1}{2}|u^n|^2\triangle x+\sum_{k=1}^{N}\psi(v_k^n)\triangle x$, 其中 $\psi(v)=\int_{v_b}^{v}[p(v_b)-p(s)]\mathrm{d}s\geqslant 0$

和
$$F^n=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}[(\frac{u_{k+1}^n-u_k^n}{\triangle x})^2+(\frac{v_{k+1}^n-v_k^n}{\triangle x})^2]\triangle x .$$

其中
$$u_0^n=u_{N+1}^n=0,\ v_0^n=v_{N+1}^n=v_b .$$

上述E^n和F^n为[2]所定义的能量. 这里, 我们引进

$$G^n=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}[(\frac{u_{k+1}^n-u_k^n}{\triangle x})^2+\frac{(v_{k+1}^n-v_k^n)(p_k^n-p_{k+1}^n)}{(\triangle x)^2}]\triangle x ,\ \text{其中}\ p_k^n=p(v_k^n).$$

现在我们建立关于E^n、F^n和G^n的估计式如下

引理 1 设满足稳定性条件

$$a=\frac{\triangle t}{\triangle x}\leqslant[\max(1,-p'(c))]^{-1},\quad \triangle x\leqslant\frac{2d}{\sqrt{-p'(c)}}\ \text{([2]的(3.1)式), 那么}$$

$$E^n\leqslant E^{n-1}-2d\triangle tG^n \tag{3}$$

这个结果可以由[2] § 3 引理 1 的证明中直接得到, 故证明从略.

引理 2 在引理 1 的假设下, 那么

$$F^n\leqslant F^{n-1}+k\triangle tG^n \tag{4}$$

其中 $k=\frac{1}{2d}\max(1,-p'(c))$.

证明 由[2] § 3 引理 2 的证明中得到

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}(u_{k+1}^n-u_k^n)^2\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}(u_{k+1}^{n-1}-u_k^{n-1})^2+\frac{\triangle t}{16d}|D(p_b-p^n)|^2$$

其中D为$N\times N$矩阵: $D=\begin{bmatrix}0&1&&&0\\-1&\ddots&\ddots&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&1\\0&&&-1&0\end{bmatrix}$, $p_b=\begin{bmatrix}p(v_b)\\\vdots\\p(v_b)\end{bmatrix}$, $p^n=\begin{bmatrix}p(v_1^n)\\\vdots\\p(v_N^n)\end{bmatrix}$

由[2]的(3.5)得到

$$|D(p_b-p^n)|^2\leqslant 4\sum_{k=0}^{N}(p_{k+1}^n-p_k^n)^2\leqslant-4p'(c)\sum_{k=0}^{N}(v_{k+1}^n-v_k^n)(p_k^n-p_{k+1}^n)$$

所以

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}(u_{k+1}^n-u_k^n)^2\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}(u_{k+1}^{n-1}-u_k^{n-1})^2+\frac{-p'(c)}{4d}\triangle t\sum_{k=0}^{N}(v_{k+1}^n-v_k^n)(p_k^n-p_{k+1}^n) \tag{5}$$

另方面, 由[2]的(3.15)得到

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}(v_{k+1}^n-v_k^n)^2\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}(v_{k+1}^{n-1}-v_k^{n-1})^2+\frac{\triangle t}{16d}|Du^n|^2$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}(v_{k+1}^{n-1}-v_k^{n-1})^2+\frac{\triangle t}{4d}\sum_{k=0}^{N}(u_{k+1}^n-u_k^n)^2 \tag{6}$$

由(5)和(6)式可得(4)成立. 引理 2 得证.

由上述引理 1 和引理2, 我们立即得到

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$F^n \leqslant F^{n-1} + \frac{k}{2d}(E^{n-1} - E^n) \leqslant \cdots \leqslant F^\circ + \frac{k}{2d}E^\circ = \widetilde{K}$$

其中正常数$\widetilde{K}$仅与方程组的参数和初始数据及边界值有关．这是［2］§3(3.16)式的改进．从而对其(3.19)式可改进为

$$f(M)^2 \leqslant \widetilde{K}^2.$$

由此可以得到［2］中定理3.1关于v_k^n的上界估计，无需附加假设条件(2)．由此，便使［2］的§3和§4的其余结果同样成立．

参 考 文 献

［1］Kanel, Ya.I., On some systems of quasilinear parabolic equations of the divergence type, U.S.S.R.Computational Math.and Math. phys., V.6,(1966).74—88.

［2］Hoff, D., A finite difference scheme for a system of two conservation laws with artificial viscosity, Math. of Compt.V.33(1979), 1171—1193.

A Note on "A Finite Difference Scheme for a System of Two Conservation Laws with Artificial Viscosity"

Zheng Yongshu

(Huaqiao University)

Abstract

In［2］, D.Hoff analyzes an implicit finite difference scheme for the mixed initial-value Dirichlet problem for a system of two conservation laws with artificial viscosity. The system is a model for isentropic flow in one space dimension. However, in［2］, there is an additional condition on the state function $p(v)$,

$$\lim_{v\to\infty} v^3|p'(v)| = \infty \qquad (*)$$

For polytropic gas, $p(v)=k^2v^{-\gamma}$, where $k>0$ and $1<\gamma\leqslant 3$, the condition $(*)$ is equivalent to $1<\gamma<2$. In the present note, we remove the restriction $(*)$, so that the main results of［2］still hold for the general state function $p(v)$ with $p'(v)<0$, $p''(v)>0$.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.