第9卷 第2期
1989年5月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.9 No.2
May, 1989

具有根性质的一个充要条件*

罗跃虎 刘 佳

（山西大学数学系，太原）

摘要：本文给出（D）类算子的一个扰动结果，并指出这个扰动结果只能对X上的（D）类算子成立；同时指出文[3]A．G．Ramm的结果仅能对H中的（D）类算子成立；在（D）类算子的条件下，我们推广了A．G．Ramm的结果．

总设X为Banach空间，对X上的离散算子L，我们引进[3]中的记号如下：

若L的一组根系[3]构成X中的基，则记$L\in B(X)$；若L的一组根系构成X中的无条件基，则记$L\in R(X)$．

定义 设T为H的线性算子，若存在$M>0$和实数a使

$$\|Tf\|\leqslant M\|L^{a}f\|,\quad \forall f\in D(L),\ (a<1) \tag{1}$$

则称T为L的一个从属算子，a称为T的一个从属指标．

文[3]对Hilbert空间H中的共自轭离散算子给出了如下结论：

设L,T满足（1）式，$p(1-a)\geqslant 2$且L的谱$\{\lambda_n\}_1^{\infty}$满足下面的（2）式，则$L+T\in R(H)$．

$$\lambda_n=Cn^{p}\left(1+0\left(\frac{1}{n}\right)\right),\quad C=\text{const}>0 \tag{2}$$

然而，我们将给出例子说明此结论不正确．随后将指出此结论只能对H中的（D）类算子L成立．并在L为（D）类算子，$p(1-a)>\frac{3}{2}$而其它条件不变时，上述结论仍成立．

例 对任何满足$p(1-\tau)\geqslant 2$的数$p>0$和$\tau<1$都存在Hilbert空间H上的离散自共轭算子L和线性算子T使L满足（2），T为L的具有一个从属指标τ的从属算子且$L+T\in B(H)$．

设$\{e_n\}_1^{\infty}$为H中的一组标准正交基，对$p>0$，定义H上的线性算子L如下：

$$Le_{2n}=n^{p}e_{2n},\quad Le_{2n-1}=n^{p}e_{2n-1},\quad n=1,2,\cdots$$

显然，L是H上的离散自共轭算子，$\sigma(L)=\{\lambda_n\}_1^{\infty}$（$\lambda_n=n^{p}$），且每个$\lambda_n$的代数重数$=2$．

令$\mu_n=\lambda_n+\dfrac{1}{2n^{(1-\tau)p+2}}\in\rho(A)$，$n=1.2,\cdots$ 定义函数$F(\lambda)$如下：

$$F(\lambda)\triangleq\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda-\mu_k}{\lambda-\lambda_k}$$

易知$F(\lambda)$为λ的半纯函数且有展开式：

---

* 1987年3月17日收到，1988年11月8日收到修改稿．

** 山西省自然科学基金资助．

$$F(\lambda)=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{2n^{(1-\tau)p+2}}/\lambda-\lambda_n$$

其中 $$C_n=\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{\lambda_n-\mu_k}{\lambda_n-\lambda_k},\quad |C_n|\leqslant\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{1}{k^2})\triangleq\gamma,\quad n=1,2,\cdots$$

定义 H上的线性泛函f如下:

$$f(e_{2n})=\frac{C_n}{4n^{(1-\tau)p-\delta+1}},\quad f(e_{2n-1})=\frac{C_n}{4n^{(1-\tau)p+1}},\quad n=1,2,\cdots$$

其中 $0<\delta<1$. 由(3)式可知 f, $fL^{\tau}\in H^*$.

取$b=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{e_{2n-1}}{n}+\frac{e_{2n}}{n^{1+\delta}})\in H$, 则显然$T=f(\cdot)b$为$L$的从属算子, 具有一个从属指标$\tau$且$L$满足(2)式.

我们断言$L+T\bar{\in}\mathrm{B}(H)$. 事实上, 利用$F(\lambda)=1-f\mathrm{R}(\lambda,L)b$和[5]中定理1.3可知$\sigma(T+L)=\{\lambda_n\}_1^{\infty}\cup\{\mu_n\}_1^{\infty}$且$L+T$的每个本征值都是代数单的, 我们容易验证:

对应于λ_n的$L+T$的本征矢为$\psi_{2n-1}=\frac{1}{n}e_{2n-1}-\frac{1}{n^{1+\delta}}e_{2n}$

对应于μ_n的$L+T$的本征矢为$\psi_{2n}=\frac{1}{2n^{(1-\tau)p+2}}\mathrm{R}(\mu_n,L)$

令

$$\varphi_{2n-1}=\psi_{2n-1},\quad \varphi_{2n}=\frac{e_{2n-1}}{n}+\frac{e_{2n}}{n^{1+\delta}},\quad y_n=\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}(\frac{e_{2k-1}}{k}+\frac{e_{2k}}{k^{1+\delta}})/\mu_n-\lambda_k$$

则 $$\psi_{2n}=\varphi_{2n}+\frac{1}{2n^{(1+\tau)p+2}}y_n,\quad n=1,2,\cdots$$

$\{\varphi_n\}_1^{\infty}$显然为H中的极小叙列[3], 但不是H中的基. 对y_n我们有估计式(记$V_n=\inf\limits_{m\neq n}|\lambda_n-\lambda_m|$)

$$\|y_n\|\leqslant\frac{2\|b\|}{V_n},\quad n=1,2,\cdots$$

若$\{\psi_n\}_1^{\infty}$为H中的基. 设$\{f_n\}_1^{\infty}$为对应于$\{\psi_n\}_1^{\infty}$的系数泛函数, 则由[2](hI, Th3.1知存在$M>0$使

$$1\leqslant\|f_n\|\cdot\|\psi_n\|\leqslant M,\quad n=1,2,\cdots$$

从而

$$\|f_n\|\leqslant nM,\quad n=1,2,\cdots.$$

于是 $$\sum_{n=1}^{\infty}\|\psi_n-\varphi_n\|\|f_n\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|y_n\|\|f_{2n}\|}{2n^{(1-\tau)p+1}}<\sum_{n=1}\frac{\|b\|M}{V_n n^{(1-\tau)p+1}}<+\infty$$

那么, 由[2](hI, Th10, a)可知$\{\varphi_n\}_1^{\infty}$为H中的基. 此为矛盾. 故$L+T\bar{\in}\mathrm{B}(H)$.

附注1 此例说明[3]中的定理不成立.

设A为X上的(D)类算子[1]. 则有$\{\varphi_n\}_1^{\infty}\subset$X, $\|\varphi_n\|=1$. $\{\lambda_n\}_1^{\infty}\subset\mathrm{C}$, 自然数$N$使: $\{\varphi_n\}_1^{\infty}$为X中的无条件基. 当$m\neq n>N$时, $\lambda_n\neq\lambda_m$, $A\varphi_n=\lambda_n\varphi_n(n>N)$, $A[\varphi_1,\cdots,\varphi_N]\subset[\varphi_1,\cdots,\varphi_N]$. $\lim\limits_{n\to\infty}|\lambda_n|=\infty$. 记$V_n=\inf\limits_{m\neq n}|\lambda_n-\lambda_m|$, 我们给出的扰动结果如下:

定理 1 设A为X上的(D)类算子，$\{\varphi_n\}_1^\infty$，$\{\lambda_n\}_1^\infty$，N如上选定，对X上的线性算子V，$D(V)\supset D(A)$，$a<1$，$VR(\lambda_0, A)^a\in[X]$(X上有界线性算子之集)，($\lambda_0\in\rho(A)$)．若下列条件之一成立：

(i) $$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|\lambda_0-\lambda_n|^a}{V_n}+\infty$$

(ii) 当X为Hilbert空间时，$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\lambda_0-\lambda_n|^2}{V_n^2}<\infty$$

则$A+V$仍为X上的(D)类算子．特别地，$A+V\in$R(X)．

证明 i) 今以λ_n为中心，$\frac{V_n}{2}$为半径作圆C_n：$|\lambda-\lambda_n|=\frac{V_n}{2}$及圆盘$\Gamma_n$：$|\lambda-\lambda_n|\leqslant\frac{V_n}{2}$，($n>N$)．由于$A$是X上的($D$)类算子，于是在$C_n$上我们易得：

$$\|R(\lambda, A)\|\leqslant\frac{a}{V_n},\quad \lambda\in C_n,\quad a=\text{const}>0 \tag{4}$$

当$\lambda\in C_n$时，$\forall x=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\varphi_n\in X$有

$$\|VR(\lambda, A)x\|=\|VR(\lambda_0, A)^a\Big[\sum_{k=1}^{k_0}x_k(\lambda_0-A)^aR(\lambda, A)\varphi_k$$

$$+\sum_{k=k_0+1}^{\infty}x_k\frac{(\lambda_0-\lambda_k)^a}{\lambda-\lambda_k}\varphi_k\|$$

$$\leqslant M\Big[\sum_{k=1}^{k_0}\|VR(\lambda, A)\varphi_k\|+2\|VR(\lambda_0, A)^a\|\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{|\lambda_0-\lambda_k|^a}{V_k}\Big]\cdot\|x\| \tag{5}$$

其中$M>0$为$\{\varphi_n\}_1^\infty$的无条件基常数．

注意到在C_n上：$|\lambda|\geqslant\frac{|\lambda_n|}{2}\to+\infty\ (n\to\infty)$，那么，在(5)式中选取定$k_0$充分大，然后再取$n$充分大就有$\|VR(\lambda, A)\|\leqslant\min\{1, \frac{1}{2a}\}$．即存在自然数$N_1(N_1\geqslant N)$使

$$\|VR(\lambda, A)\|\leqslant\min\{1, \frac{1}{2a}\},\quad \lambda\in C_n,\quad n>N \tag{6}$$

于是当$n>N_1$时，$C_n\subset\rho(A+V)$且在C_n上

$$R(\lambda, A+V)=R(\lambda, A)+R(\lambda, A)[I-VR(\lambda, A)]^{-1}VR(\lambda, A) \tag{7}$$

因此，$A+V$为X上的离散算子．由(4)，(5)，(7)式可知当 $n>N_1$ 时

$$\Big\|\frac{1}{2\pi_i}\int_{C_n}R(\lambda, A)\mathrm{d}\lambda-\frac{1}{2\pi_i}\int_{C_n}R(\lambda, A+V)\mathrm{d}\lambda\Big\|<1$$

故$A+V$在C_n中有且仅有一个本征值，且其代数重数$=1$.对$n>N_1$，令

$$\psi_n=\frac{1}{2\pi_i}\int_{C_n}R(\lambda, A+V)\varphi_n\mathrm{d}\lambda$$

利用(4)，(6)，(7)及关系式$VR(\lambda, A)=VR(\lambda_0, A)^a\cdot\frac{(\lambda_0-\lambda_n)^a}{\lambda-\lambda_n}\varphi_n$ 可知有$N_2(N_2\geqslant N_1)$使

$$\sum_{n=N_2+1}^{\infty}\|\psi_n-\varphi_n\|<1 \tag{8}$$

注意到$\{\varphi_n\}_1^\infty$的系数泛函列[2]$\{f_n\}_1^\infty$满足$\sup\limits_n\|f_n\|<\infty$(利用[2](hI.Th3.1)),那么由[2](hⅡ、Th16.2和(8)式可知$\{\varphi_n\}_1^N\cup\{\psi_n\}_{N_2+1}^\infty$为X中的无条件基．记$p_n=\frac{1}{2\pi_i}\int_{C_n}R(\lambda, A+$

$V)\mathrm{d}\lambda$，$n>N_2$，(即p_n为对应于$A+V$的本征值ψ_n的本征空间的投影算子)．由于$\{\psi_n\}_1^{N_2}\cup\{\psi_n\}_{N_2+1}^{n}$为X中的基，故有有限秩算子$p$使得：

$$\forall x\in \mathrm{X},\quad px+\sum_{n=N_2+1}^{\infty}p_n x=x$$

那么，由[6]中引理2知存在$A+V$的本征值$\mu_1,\cdots,\mu_m(m\leqslant N_2)$使得：

$$\forall x\in \mathrm{X},\quad \sum_{n=1}^{m}p_n x+\sum_{n=N_2+1}^{\infty}p_n x=x$$

其中p_n为对应于$A+V$的本征值μ_n的本征空间的投影算子．$n=1,2,\cdots,m$．再由[6]中引理1和[2](hⅡ，Th16.2可知必存在$A+V$的广义本征矢$\psi_1,\cdots\psi_{N_2}$使$\{\psi_n\}_1^{\infty}$构成X中的无条件基．从而当条件(i)成立时命题得证．

ii）证明过程与(i)类似．这时我们得到：

$$\sum_{n=N_2+1}^{\infty}\|\psi_n-\varphi_n\|^2<1$$

当我们如下定义算子Q：

$$\forall x\in D(Q)=\{x=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\varphi_n\in \mathrm{X}\ \Big|\sum_{n=N_2+1}^{\infty}x_n\psi_n\in \mathrm{X}\},$$

$$Qx=\sum_{n=1}^{N_2}x_n\varphi_n+\sum_{n=N_2+1}^{\infty}x_n\psi_n$$

时，利用[2](hⅡ，Th18.1，易知$Q\in[\mathrm{X}]$，$0\in\rho(Q)$．那么可知$\{\varphi_n\}_1^{N_2}\cup\{\psi_n\}_{N_2+1}^{\infty}$为X中的无条件基．于是重复(i)后一段的证明可知$A+V$为X上的$(D)$类算子．

推论1.1 若X为Hilbert空间，(2)式成立，且$p(1-a)>\frac{3}{2}$，则$A+V$仍为X上的(D)类算子．特别地，$A+V\in R(\mathrm{X})$．

证明 此时有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{V_n}{n^{p-1}}=p\neq0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|\lambda_0-\lambda_n|^a}{n^{ap}}=C$．故当$p(1-a)>\frac{3}{2}$时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\lambda_0-\lambda_n|^2}{V_n^2}<+\infty.$$

下面我们假设L为X上的离散谱算子，L的本征值除有限个之外都是代数重数＝几何重数**，$\sigma(L)=\{\lambda_n\}_1^{\infty}$，$\lambda_{n_{i-1}+1}=\lambda_{n_{i-1}+2}=\cdots=\lambda_{n_i}$，$n_0=0$，$n_i-n_{i-1}$为$\lambda_{n_i}$的代数重数，$i=1,2,\cdots$，$\lambda_{n_i}\neq\lambda_{n_j}(i=j)$．令$V_k=\inf\limits_{i\neq k}|\lambda_{n_i}-\lambda_{n_k}|$，$E_k$表示对应于$L$的本征值$\lambda_{n_k}$的本征空间的投影算子．

为得出定理2，我们给出下面的：

引理1 L,E_n，$\{\lambda_n\}_1^{\infty}$，V_n如上选定．若X_1，X_2为X的闭子空间，使得$\mathrm{X}=\mathrm{X}_1\oplus\mathrm{X}_2$($\mathrm{X}_1$与$\mathrm{X}_2$的直接和)，$\mathrm{X}_1$为$L$的不变子空间，$L$在$\mathrm{X}_1$上的限制算子$L_1$的本征值的代数重数＝几何重数＝2，则对任何$a<1$，均存在$f\in\mathrm{X}^*$，$b\in\mathrm{X}$使

(i) $fR(\lambda_0,L)^a\in\mathrm{X}^*$，$(\lambda_0\in\rho(\lambda))$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\|fE_n\|}{V_n}+\infty$，

(ii) $L+f(\cdot)b\in B(\mathrm{X})$．

** 本征值λ_n的代数重数＝几何重数，意指对应于λ_n的本征空间由对应于它的本征矢张成．

证明 为书写简洁起见，不妨认为$\sigma(L_1)=\sigma(L)$．设对应于L_1的本征值λ_{n_k}的本征空间的一组规范基为φ_{2k-1}，φ_{2k}．显然[6]，$\{\varphi_n\}_1^\infty$为X_1中的极小叙列[2]．设$\{f_n\}_1^\infty\subset X_1^*$为对应于$\{\varphi_n\}_1^\infty$的系数泛函列．

取$\mu_k=\lambda_{n_k}+\frac{(\lambda_0-\lambda_{n_k})^a}{k^4}a_k\in\rho(L)\subset\rho(L_1)$，其中$a_k=\min\{1,\frac{1}{\delta_k},\frac{V_k}{2\delta_k},\frac{1}{\delta_k r_k},\frac{V_k}{\delta_k r_k},\frac{1}{r_k}\}$，$\delta_k=|\lambda_0-\lambda_{n_k}|^a$，$r_k=\|f_{2k-1}\|+\|f_{2k}\|$，$k=1,2,\cdots$，

定义λ的函数$F(\lambda)$如下：

$$F(\lambda)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda-\mu_k}{\lambda-\lambda_{n_k}}$$

则易知[7]$F(\lambda)$为λ的半纯函数且有展开式：

$$F(\lambda)=1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_k}{\lambda-\lambda_{n_k}}\cdot\frac{(\lambda_0-\lambda_{n_k})}{k^4}a_k$$

其中 $C_k=\prod_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{\infty}\frac{\lambda_{n_m}-\mu_k}{\lambda_{n_m}-\lambda_{n_k}}$，$|C_k|\leqslant\tau\,(\tau=\mathrm{const}>0)$．

定义X_1上的线性泛函f如下：

$$f(\varphi_{2k-1})=\frac{(\lambda_0-\lambda_{n_k})^a}{k^2}a_kC_k,\quad f(\varphi_{2k})=\frac{(\lambda_0-\lambda_{n_k})^a}{k^{2-\delta}}a_kC_k,\ k=1,2,\cdots,\ (0<\delta<1).$$

显然$f\in X_1^*$，$fR(\lambda_0,L_1)^a\in X_1^*$且$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|fE_k'\|}{V_k}<+\infty$（$E_k'$为对应于$L_1$的本征值$\lambda_{n_k}$的本空间的投影算子）．取$b=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\varphi_{2k-1}}{k^2}+\frac{\varphi_{2k}}{k^{2+\delta}})\in X_1$，则类似于例子中的证明可证$L_1+f(\cdot)b\bar{\in}B(X_1)$．

设p_1为X到X_1上的投影算子：$\forall x=x_1+x_2\in X$，$(x_i\in X_i)$，$p_1x=x_1$．它是连续的，且$Lp_1=p_1L$，$E_kp_1=p_1E_k=E_k'$．那么令$g(\cdot)=fp_1(\cdot)\in X^*$．显然$g$，$b$为所求．

定理 2 L，E_n，$\{\lambda_n\}_1^\infty$，V_n同引理1，如果L不是X中的(D)类算子，则对任何$a<1$皆存在$f\in X^*$，$b\in X$使得：

(i) $fR(\lambda_0,L)^a\in X^*$，$(\lambda_0\in\rho(L))$，$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|fE_k\|}{V_k}<+\infty$

(ii) $L+f(\cdot)b\bar{\in}R(X)$．

证明 若L有无穷多个本征值的代数重数$=2$，则我们选取$\{\lambda_{n_{k_i}}\}_{i=1}^\infty$为$L$的代 重数$=$几几何重数$=2$的本征值列．令$X_1$为由子空间$E_1X$，$E_2X_1$，…张成的闭子空间，它显然是$L$的不变子空间，$L$在$X_1$上的限制算子的每个本征值的代数重数显然等于它的几何重数$=2$.且有X的闭子空间X_2使$X_1\oplus X_2=X$．故由引理1可知此时命题成立．

若L有无穷多个本征值的代数重数$\geqslant3$，不妨认为每个λ_{n_k}都为L的代数重数$=$几何重数$\geqslant3$的本征值．在每个子空间E_kX中取一组规范基$\varphi_{n_{k-1}+1}$，$\varphi_{n_{k-1}+2}\cdots\varphi_{n_k}$，则[6]$\{\varphi_n\}_1^\infty$为$X$中的极小叙列，设$\{f_n\}_1^\infty$为对应于$\{\varphi_n\}_1^\infty$的系数泛函列，定义$X$上的线性泛函$g$如下：

$$g(\varphi_{n_k})=\frac{1}{k^2}\min\{1,\frac{1}{\|f_{n_k}\|},\frac{|\lambda_0-\lambda_{n_k}|^a}{\|f_{n_k}\|},\frac{V_k}{\|f_{n_k}\|}\},\ g(\varphi_m)=0,\ n_{k-1}<m<n_k,\ k=1,2,\cdots$$

则显然有$g\in X^*$．$gR(\lambda_0, L)^a\in X^*$且$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|gE_k\|}{V_k}<\infty$，取$b=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\varphi_{n_k}\in X$．若$L+g(\cdot)b\in R(X)$，则命题已得证．若$L+g(.)b\in R(X)$．由$g$的定义可知每个$\lambda_{n_k}$为$L+g(.)b$的代数重数$=n_k-n_{k-1}-1$的本征值(利用[5]定理1.3)．易知$\varphi_{n_{k-1}+1}$，$\varphi_{n_{k-1}+2}$，…，$\varphi_{n_{k-1}}$为对应于$L+g(.)b$的本征值$\lambda_{n_k}$的本征空间的一组基．因此有$\psi_{n_{k-1}+1}$，$\psi_{n_{k-1}+2}$，…，$\psi_{n_k-1}$为$\varphi_{n_{k-1}+1}$，$\varphi_{n_{k-1}+2}$，…，$\varphi_{n_k-1}$的线性组合使$\{\psi_{n_{k-1}+1}, \psi_{n_{k-1}+2}, \cdots, \psi_{n_k-1}\}_{k=1}^{\infty}$为X中的无条件基叙列[2]，那么令$X_1$为由$\{\psi_{n_{k-1}}, \psi_{n_{k-1}+2}\}_{k=1}^{\infty}$张成的闭子空间，则显然有：$X_1$为$L$的不变子空间，$L$在$X_1$上的限制算子的每个本征值的代数重数＝几何重数＝2．并且有X的闭子空间X_2使$X_1\oplus X_2$．于是由引理1可知此命题成立．

由定理1和定理2我们可得到下面的

定理3 $L, E_n, \{\lambda_n\}_1^{\infty}, V$同引理1．若对X上的任何线性算子$V$，$D(V)\supset D(A)$，$a<1$，$VR(\lambda_0, A)^a\in[X]$ $(\lambda_0\in\rho(A))$，只要下列条件之一成立：

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\lambda_0-\lambda_n|^a}{V_n}<+\infty$

(ii) 当X为Hilbert 空间时，$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|\lambda_0-\lambda_n|^{2a}}{V_n^2}<+\infty$

就有$A+V\in R(X)$成立的充要条件是A为X上的(D)类算子．

由定理3我们可立刻得到

推论3.1 设H为Hilbert空间，L为X上的离散自共轭算子，$\sigma(L)=\{\lambda_n\}_1^{\infty}$，(2)式成立且$p(1-a)>\frac{3}{2}$，则对任何满足(1)式的线性算子$T$都有$L+T\in R(H)$的充要条件是$t$为X上的$(D)$类算子．

附注2 推论3.1说明[3]中A．G．Ramm的结论能且仅能对H中自共轭的(D)类算子成立；并在L为(D)类算子的条件下，我们可将[3]中$p(1-a)\geqslant 2$的条件放松为$p(1-a)>\frac{3}{2}$而仍保持原结论的成立．

参 考 文 献

[1] Dunford . N & Schwartz, J.T . Linear Operator, Part Ⅲ. Wiley-Interscience, , 1971.

[2] Singer, I., Bases in Banach Spaces I., Springer-Verlag Berlin Heidelberg Now York, 1970.

[3] Ramm. A.G., Journal of Mathematic Analysis and Application 80:2(1981), 57—66.

[4] 李炳仁，数学学报，20:3(1978)，206—222.

[5] 刘嘉荃，系统科学与数学，2:2(1982)，81—94.

[6] 刘 佳，山西大学学报，10:4(1987)，12—18.