第9卷 第2期
1989年5月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.9 No.2
May, 1989

格上离散度*

刘晓石

（成都科技大学应用数学系）

离散度是集论拓扑中非常重要的一种基数函数，由它可得到许多重要的基数不等式。关于它在Fuzzy拓扑中，更一般地，在格上点式拓扑中性质的讨论，则是较新的领域，因而有很大的发展余地。本文在一般的完全分配格上，以“远域”[1]为基本工具，较为深入地讨论了格上离散度的性质，得到了格上拓扑中涉及离散度的若干重要定理和基数不等式。

§1 基本定义及概念

本文中，以L(M)表示格为L，非零并既约元集为M的完全分配格，亦称分子格．其最大、最小元分别为1，0．以η表L上的闭余拓扑([1])、(L(M)，η)称为拓扑分子格，简写为TML．对$A\in$L，$\overline{A}$表A在η下的闭包．

通常，以a、b、p、q等表M的成员，以A、B、C等表L的一般成员；以k、λ、μ等表基数，α、β、γ等表序数．设X是一集，记$[X]^{\leqslant k}=\{Y\subset X:|Y|\leqslant k\}$（$|Y|$表示$Y$的势）．相应地定义$[X]^{k}$．$\forall A\in$L，记$|A|=\min\{|\varphi|:\varphi\subset M$ 且 $\vee\varphi=A\}$．

设（L(M)，η）是TML，

定义1.1 $\forall a\in M$，记$\eta(a)=\{A\in\eta:a\not\leqslant A\}$．$\eta(a)$称为$a$的远域系，当$A\in\eta(a)$时，称$A$是$a$的远域．

定义1.2 S$\subset$M称为是L上的离散集，如果$\forall a\in$S，存在$A\in\eta(a)$，使得$\vee\{b\in S:a\not\leqslant b\}\leqslant A$．显然，S是离散的当且仅当$\forall a\in$S，有$a\not\leqslant\overline{\vee\{b\in S:a\not\leqslant b\}}$．

$$S(L)=\omega\sup\{|S|:S\subset M\text{且是L上的离散集}\}$$

S(L)称为L上的离散度．

定义1.3 $o(L)=|\eta|$．

定义1.4 $\forall A\in$L，$\zeta_A\subset\eta$称为A处的局部Ψ远域基，亦称伪基，如果$\forall b\in M$，$A\not\leqslant b$，存在$B\in\zeta_A$，使$A\not\leqslant B$，$b\leqslant B$．

$$\Psi(A,L)=\omega\cdot\min\{|\zeta_A|:\zeta_A\subset\eta\text{是}A\text{处局部伪基}\}$$

$$\Psi(L)=\sup\{\Psi(a,L):a\in M\}.\quad \Psi(L)\text{称为伪特征．}$$

定义1.5 $\mathscr{C}\subset\eta\setminus\{1\}$称为L上cellular(胞腔)集族，如果$\forall A,B\in\mathscr{C}$，有$A\vee B=1$．

* 1987年1月22日收到．

$$c(\mathrm{L})=\omega\cdot\sup\{|\mathscr{C}|:\mathscr{C}\text{是L上的cellular集族}\}.$$

定义1.6 $\varphi\subset\mathrm{M}$称为L(M)上的左分离集，如果存在φ上的良序$\prec$，使得$\forall a\in\varphi$，存在$B\in\eta(a)$，当$b\in\varphi$且$b\prec a$时，有$b\leqslant B$.

$\varphi\subset\mathrm{M}$称为L(M)上的右分离集,如果存在φ上的良序$\prec$，使得$\forall a\in\varphi$，存在$B\in\eta(a)$，当$b\in\varphi$且$a\prec b$时，有$b\leqslant B$.

$$z(\mathrm{L})=\omega\cdot\sup\{|\varphi|:\varphi\subset\mathrm{M}\text{是L(M)上的左分离集}\}.$$
$$h(\mathrm{L})=\omega\cdot\sup\{|\varphi|:\varphi\subset\mathrm{M}\text{是L(M)上的右分离集}\}.$$

显然，若$\varphi\subset\mathrm{M}$既左分离又右分离，则$\forall a\in\varphi$，有$a\not\leqslant\overline{\vee\{b\in\varphi:b\neq a\}}$，故$\varphi$是L上的离散集.

定义1.7 $\forall H\in\mathrm{L}$，记$\mathrm{L}_H=\{A\in\mathrm{L}:A\leqslant H\}$，易知$\mathrm{L}_H$作为L的子格(以原来的半序为半序)也是完全分配的；记$\eta_H=\{A\wedge H:A\in\eta\}$，它是$\mathrm{L}_H$上的闭余拓扑；$\mathrm{M}_H=\{a\in\mathrm{M}:a\leqslant H\}$是$\mathrm{L}_H$上非零既约元集．$(\mathrm{L}_H(\mathrm{M}_H),\eta_H)$称为$(\mathrm{L}(\mathrm{M}),\eta)$的子拓扑分子格.

定义1.8 设L(M)是分子格，$A\in\mathrm{L}$，$A\neq0$；$\forall b\in\mathrm{M}$，若b满足条件：$b\leqslant A$且$\forall c\in\mathrm{M}$，$b\leqslant c\leqslant A$，都有$b=c$，则称b是A的成份．1的成份称为L的极大点.

命题1.9([1]) 设L(M)是分子格，$A\in\mathrm{L}$，$A\neq0$；$\forall a\in\mathrm{M}$，$a\leqslant A$，则A至少有一成份p满足$a\leqslant p$；且A有唯一包含a的成份当且仅当A的不同成份不交.

§2 有关离散度S(L)的基数不等式

命题2.1 设$(\mathrm{L}(\mathrm{M}),\eta)$是TML，$S(\mathrm{L})=k$，则$\forall H\in\mathrm{L}$，有$\mathrm{S}(\mathrm{L}_H)\leqslant k$.

由上述命题知，离散度关于L的子格单调.

命题2.2 设$(\mathrm{L}(\mathrm{M}),\eta)$是TML，则$\mathrm{S}(\mathrm{L})\geqslant c(\mathrm{L})$.

证 设$\mathscr{C}\subset\eta\backslash\{1\}$是L上cellular集族，$\forall B\in\mathscr{C}$，则$B\neq1$,故存在$b(B)\in\mathrm{M}$使$b(B)\not\leqslant B$.令$\mathrm{S}=\{b(B):B\in\mathscr{C}\}$，则$\forall A\in\mathscr{C}$，$A\neq B$，由$A\vee B=1$知$b(A)\leqslant B$，从而$\vee\{b(A):A\in\mathscr{C}$且$A\neq B\}\leqslant B$，$B\in\eta(b(B))$，故S离散. ■

注：若定义$hc(\mathrm{L})=\sup\{c(\mathrm{L}_H):H\in\mathrm{L}\}$，则L上未必有$\mathrm{S}(\mathrm{L})=hc(\mathrm{L})$．这与集论拓扑不同．例如，令$\mathrm{L}_1=\omega_1$，其半序即$\omega_1$上良序；$\mathrm{X}=\{x\}$，$\mathrm{L}=\mathrm{L}_1^{\mathrm{X}}$，令$\eta=\{x_a:a\in\omega_1\}$，在$(\mathrm{L},\eta)$上，易知$\mathrm{S}(\mathrm{L})=\omega_1$，而$\forall x_a\in\mathrm{L}$，$\mathrm{L}_{x_a}$上没有cellular集族，故$hc(\mathrm{L})<\mathrm{S}(\mathrm{L})$.

定义2.3 $\varphi\subset\mathrm{M}$称为L上的反链，如果$\forall\{a,b\}\in[\varphi]^2$，有$a\wedge b=0$．$\varphi\subset\mathrm{M}$称为L上的准反链，如果$\forall\{a,b\}\in[\varphi]^2$，有$a\not\leqslant b$，$b\not\leqslant a$.

定义2.4 称$(\mathrm{L}(\mathrm{M}),\eta)$是$T_2$的，如果$\forall\{a,b\}\in[\mathrm{M}]^2$，且$a\wedge b=0$，存在$A\in\eta(a)$，$B\in\eta(b)$，使$A\vee B=1$.

称$(\mathrm{L}(\mathrm{M}),\eta)$是强$\mathrm{T}_2$的，如果$\forall\{a,b\}\in[\mathrm{M}]^2$，$a\not\leqslant b$，$b\not\leqslant a$，则存在$A\in\eta(a)$，$B\in\eta(b)$，使$A\vee B=1$.

显然，强$\mathrm{T}_2\Rightarrow\mathrm{T}_2$.

定义2.5 设$(\mathrm{L}(\mathrm{M}),\eta)$是TML，以$(\mathrm{L})_k$表示基础格仍是L，闭余拓扑为$\eta'=\{\bigvee_{a\in k}A_a:A_a\in\eta\}$的TML．定义

$$\Psi_l(\mathrm{L})=\omega\cdot\min\{k:\text{在}(\mathrm{L})_k\text{上，M的每条准反链是左分离的}\}$$

引理2.6([3]) 设X是一集，λ,k都是无穷基数，以${}^{a}k$表示从a到k的全体函数，令${}^{<\lambda}k=\bigcup_{a\in\lambda}{}^{a}k$，如果$\forall t\in{}^{<\lambda}k$，存在$\mathrm{S}_t$，$\mathrm{F}_t\subset\mathrm{X}$且满足以下条件：$\mathrm{S}_\phi=\mathrm{X}$，当$t$的长度为极限序

数γ时，$S_t=\bigcap_{\alpha\in\gamma}S_{t\restriction\alpha}$；其余有 $S_t=F_t\cup(\bigcup_{\alpha\in k}S_{t\frown\langle\alpha\rangle})$，且$F_t\cap(\bigcup_{\alpha\in k}S_{t\frown\langle\alpha\rangle})=\phi$，则有：

$X=\bigcup\{F_t:t\in{}^{<\lambda}k\}\cup(\bigcup\{S_t:t\in{}^{\lambda}k\})$（符号$t\frown\langle\alpha\rangle$ 表示在序列 t 之末尾添上α而成的新序列）.

以上引理称为分歧论证(ramification argument).

定理2.7 若$(L(M),\eta)$是强T_2的，$\zeta\subset M$是L上的准反链，则有 $|\zeta|\leqslant 2^{S(L)\cdot\psi_l(L)}$.

证 令 $k=S(L)\cdot\psi_l(L)$. 反设 $|\zeta|>2^k$，我们利用引理2.6在M中构造一个势为k^+的离散集如下：

设$\prec$是ζ上的良序，$\forall a\in\zeta$，由$\psi_l(L)$的定义，存在 $\{F^a_\beta:\beta\in k\}\subset\eta$，使得 $a\not\leqslant\bigvee_{\beta\in k}F^a_\beta$ 且 $\bigvee\{b\in\zeta:b\prec a\}\leqslant\bigvee_{\beta\in k}F^a_\beta$.…（1）首先定义几个符号：$\forall H\subset\zeta$，记$x^0(H)$是$H$的关于$\prec$之首元，$x^1(H)$是其第二元，$l(H)=\{x^0(H),x^1(H)\}$. 由强$T_2$性，存在$A^i(H)$是$x^i(H)$的远域，$(i=0,1)$使$A^0(H)\vee A^1(H)=1$.…（2）对$\forall i\in 2$，由于$x^i(H)\not\leqslant A^i(H)\vee(\bigvee_{\beta\in k}F^{x^i(H)}_\beta)$，设$\beta^*(x^i(H))$是$x^i(H)$的标准极小族，(见[1])由$\sup\beta^*(x^i(H))=x^i(H)$；存在 $c(x^i(H))\in\beta^*(x^i(H))$ 使得 $c(x^i(H))\not\leqslant A^i(H)\vee(\bigvee_{\beta\in k}F^{x^i(H)}_\beta)$…（3）$\forall\beta\in k$，定义$f_{2\beta+i}(H)=\{a\in H\setminus l(H):a\leqslant A^i(H)$ 且 $c(x^i(H))\leqslant F^a_\beta\}$…（4）由极小族的性质及由（1）得 $x^i(H)\leqslant\bigvee_{\beta\in k}F^a_\beta$，存在$\beta\in k$使 $c(x^i(H))\leqslant F^a_\beta$. 由（2）可知，$H\setminus l(H)=\bigcup_{\gamma\in k}f_\gamma(H)$.（注：$\forall\gamma\in k$，$\gamma$总可以写成$2\beta+i$ $(i=0,1)$的形式）. 当 $|H|\leqslant 1$时，定义$l(H)=H$，$\forall\gamma\in k$，$f_\gamma(H)=\phi$，以下，对 $\forall t\in{}^{<k^+}k$，归纳定义 S_t，$F_t\subset\zeta$如次：

令 $S_\phi=\zeta$，若S_t已定义，令 $F_t=l(S_t)$. 对$\forall\gamma\in k$，令 $S_{t\frown\langle\gamma\rangle}=f_\gamma(S_t)$. 最后，在极限步时，设 $\lambda\in k$是极限序数，$\forall u\in{}^{<\lambda}k$，$S_u$已定义，对每个$t\in{}^{\lambda}k$，令$S_t=\bigcap\{S_{t\restriction\alpha}:\alpha\in\lambda\}$. 显然，$S_t=l(S_t)\cup(\bigcup_{\gamma\in k}f_\gamma(S_t))=F_t\cup(\bigcup_{\gamma\in k}S_{t\frown\langle\gamma\rangle})$，且 $F_t\cap(\bigcup_{\gamma\in k}S_{t\frown\langle\gamma\rangle})=\phi$，故此定义满足引理4.6之条件，得到 $\zeta=(\bigcup\{F_t:t\in{}^{\leqslant k^+}k\})\cup(\bigcup\{S_t:t\in{}^{k^+}k)$. 如果$\forall t\in{}^{k^+}k$ 有$S_t=\phi$，则$F_t=\phi$，于是$\zeta=\bigcup\{F_t:t\in{}^{<k^+}k\}$，有 $|\zeta|\leqslant|\bigcup_{\alpha\in k^+}k^\alpha|\leqslant k^+\cdot 2^k=2^k$，矛盾于 $|\zeta|>2^k$，从而，存在$t\in{}^{k^+}k$使得$S_t\neq\phi$. 由我们的归纳构造，知 $\forall\gamma\in k^+$，$S_{t\restriction\gamma}\neq\phi$，于是 $|S_{t\restriction\gamma}|>2$. 显然$t(\gamma)\in k$，把它写成$2\beta(\gamma)+i(\gamma)$的形式，令 $a_\gamma=x^{i(\gamma)}(S_{t\restriction\gamma})$，由$k^+$的正则性，不难证明，存在固定的$(i_0,\beta_0)\in 2\times k$，使得若 $T=\{\gamma\in k^+:i(\gamma)=i_0,\ t(\gamma)=2\beta_0+i_0\}$，则 $|T|=k^+$. 对每个$a_\gamma\in T$，由（3），存在对应的$c_\gamma\in M$，$c_\gamma=c(x^{i(\gamma)}(S_{t\restriction\gamma}))=c(a_\gamma)$，且满足（3）、（4）的条件. 以下证明，集合 $D=\{c_\gamma:\gamma\in T\}$是L上离散集.

$\forall\gamma\in T$，由（3）知$c_\gamma\not\leqslant A^{i_0}(S_{t\restriction\gamma})$，而$\forall\beta>\gamma$，$\beta\in T$，有 $a_\beta\in S_{t\restriction\gamma+1}=S_{t\restriction\gamma\frown\langle t(\gamma)\rangle}$. 这里$t(\gamma)=2\beta_0+i_0$，故 $a_\beta\in f_{2\beta_0+i_0}(S_{t\restriction\gamma})$…（5）从而 $c_\beta\leqslant a_\beta\leqslant A^{i_0}(S_{t\restriction\gamma})$，于是D是右分离的.

另一方面，固定β，$\forall\gamma\in T$且$\gamma<\beta$，有$c_\gamma\leqslant x^{i_0}(S_{t\restriction\gamma})$，由（5）及（4）知 $c_\gamma\leqslant F^{a_\beta}_{\beta_0}$，且由(3)知$c_\beta\not\leqslant\bigvee_{\alpha\in k}F^{a_\beta}_\alpha$，得 $c_\beta\not\leqslant F^{a_\beta}_{\beta_0}$. 于是 $\{c_\gamma:\gamma\in T\}$左分离. 从而，D是L上的离散集，且 $|D|=k^+$，矛盾于$S(L)\leqslant k$，命题得证. ■

从上述证明中可以看出，若定义 $\psi_l'(\mathrm{L})=\omega\cdot\min\{k$：在$(\mathrm{L})_k$上，M中每条反链是左分离的$\}$，则有以下结论：

推论2.8 若$(\mathrm{L}(\mathrm{M}),\eta)\in\mathrm{T}_2$，$\zeta\subset\mathrm{M}$是L上反链，则

$$|\zeta|\leqslant 2^{\mathrm{S}(\mathrm{L})\cdot\psi_l'(\mathrm{L})}.\text{（显然 }\psi_l'(\mathrm{L})\leqslant\psi_l(\mathrm{L})\text{）}$$

定义2.9 称$(\mathrm{L}(\mathrm{M}),\eta)\in\mathrm{T}_1$，如果$\forall a,b\in\mathrm{M}$，$a\nleqslant b$，存在$B\in\eta(a)$使$b\leqslant B$.

定理2.10（[2]） 若$(\mathrm{L}(\mathrm{M}),\eta)\in\mathrm{T}_1$，则$|\mathrm{M}|\leqslant 2^{\mathrm{S}(\mathrm{L})\cdot\psi(\mathrm{L})}$.

引理2.11（[2]） 若$\mathrm{S}(\mathrm{L})=k$，U是$(\mathrm{L}(\mathrm{M}),\eta)$上的闭余覆盖（即$\wedge U=0$且$U\subset\eta$），则存在在$V\in[U]^{\leqslant k}$，$\mathrm{S}\in[\mathrm{M}]^{\leqslant k}$，使得$\wedge V\leqslant\overline{\vee\mathrm{S}}$.

引理2.12（[1]） 若$(\mathrm{L}(\mathrm{M}),\eta)$是$\mathrm{T}_1$的，则$\forall a\in\mathrm{M}$，$a$是闭元.

引理2.13 若$(\mathrm{L}(\mathrm{M}),\eta)$是$\mathrm{T}_1$的，$\mathrm{S}(\mathrm{L})=k$，且$\forall p\in\mathrm{M}$，$\mathscr{D}=\{d\in\mathrm{M}:d<p\}$关于“$\leqslant$”是全序的，则存在$\mathscr{E}\in[\mathscr{D}]^{\leqslant k}$，使得$\forall d\in\mathscr{D}$，存在$\mathrm{e}\in\mathscr{E}$，有$d\leqslant\mathrm{e}<p$（$\mathrm{e}<p$表示$\mathrm{e}\leqslant p$且$\mathrm{e}\neq p$）.

证 不妨设$\forall d\in\mathscr{D}$，存在$b<p$使得$d<b<p$（否则，存在$a\in\mathscr{D}$，使$\forall b<p$均有$b\leqslant a$，令$\mathscr{E}=\{a\}$即可）.如果引理不真，则$\forall\mathscr{E}\in[\mathscr{D}]^{\leqslant k}$，有$\vee\mathscr{E}<p$.因为若$\vee\mathscr{E}=p$，$\forall d\in\mathscr{D}$，则$\{d\}\cup\mathscr{E}$亦是全序集.若$\forall e\in\mathscr{E}$都有$e\leqslant d$，则$\vee\mathscr{E}\leqslant d<p$，矛盾，故存在$e\in\mathscr{E}$，使$d<e$，则引理满足.以下归纳定义一集$\mathscr{B}=\{b_a:a\in k^+\}$如下：$\forall a\in k^+$，设对每个$\beta\in a$，$c_\beta$、$b_\beta$已定义，且满足$\forall\gamma\in a$，$b_\gamma>c_\gamma\geqslant\bigvee_{\beta\in\gamma}b_\beta$.由$\bigvee_{\beta\in a}b_\beta<p$及$\mathscr{D}$的全序性，不难知存在$c_a<p$ 使得$\bigvee_{\beta\in a}b_\beta\leqslant c_a<p$；再取$b_a<p$使$c_a<b_a<b$，归纳定义完成.由$\mathrm{T}_1$性及引理2.12，得到$\forall a\in k^+$，有$\overline{\vee\{b\in\mathscr{B}:b_a\nleqslant b\}}\leqslant c_a$，且$b_a\nleqslant c_a$，故$\mathscr{B}$是L上离散集，且$|\mathscr{B}|=k^+$，矛盾于$\mathrm{S}(\mathrm{L})=k$

定义2.14 称$(\mathrm{L}(\mathrm{M})\ \eta)\in\mathrm{T}_{-1}$，如果$\forall a,b\in\mathrm{M}$，$a<b$，则存在$B\in\eta(b)$，使$a\leqslant B$.容易证明，$\mathrm{T}_{-1}+\mathrm{T}_2\Rightarrow\mathrm{T}_1$.

定理2.15 设$(\mathrm{L}(\mathrm{M}),\eta)\in\mathrm{T}_{-1},\mathrm{T}_2$，$\forall p\in\mathrm{M}$，集合$\{d\in\mathrm{M}:d<p\}$关于“$\leqslant$”是全序的，且不同极大点彼此不交，则有 $\psi(\mathrm{L})\leqslant 2^{\mathrm{S}(\mathrm{L})}$.

证 令$\mathrm{S}(\mathrm{L})=k$，$\forall p\in\mathrm{M}$，令$\mathscr{A}=\{q\in\mathrm{M},\ q\nleqslant p,\ p\nleqslant q\}$，由定理的条件不难知$\forall q\in\mathscr{A}$，$q\wedge p=0$.由$\mathrm{T}_2$性，存在$V_q\in\eta(p)$，$U_q\in\eta(q)$使得$V_q\vee U_q=1$.记$U=\{U_q:q\in\mathscr{A}\}$，令$A=\vee\mathscr{A}$，可证$U$是$A$的闭余覆盖（即$\wedge U\wedge A=0$）：否则，存在$c\in\mathrm{M}$，使$c\leqslant\wedge U\wedge A$，由$c\leqslant A=\vee\mathscr{A}$，存在$q\in\mathscr{A}$，使$q\wedge c\neq 0$.于是，存在$d\in\mathrm{M}$使$d\leqslant q\wedge c$.设$r$为含$d$之极大点，$p'$为含$p$之极大点，由$p\wedge q=0$，可得$r\wedge p'=0$，于是$d\wedge p'=0$，可得$c\nleqslant p$且$p\nleqslant 0$，从而存在$U_c\in U$使$c\nleqslant U_c$，且$U_c\in U_1$；矛盾于$c\leqslant\wedge U$.

由$\mathrm{S}(\mathrm{L}_A)\leqslant\mathrm{S}(\mathrm{L})=k$及引理2.11，存在$V\in[U]^{\leqslant k}$，$\mathrm{S}\in[\mathrm{M}_A]^{\leqslant k}\subset[\mathrm{M}]^{\leqslant k}$使$\wedge V\wedge A\leqslant\overline{\vee\mathrm{S}}$.对应地，令$\widetilde{V}=\{V_q:U_q\in V\}$ 则$|\widetilde{U}|\leqslant k$.由命题1.9，我们不妨把S的成员都取作L上的极大点.

再取$\mathscr{W}=\{\overline{\vee C}:C\subset S\}$，取$\mathscr{E}\in[\{d\in\mathrm{M}:d<p\}]^{\leqslant k}$且满足引理2.13，记$\widetilde{\mathscr{W}}=\widetilde{V}\cup\mathscr{W}\cup\mathscr{E}$，则$|\widetilde{\mathscr{W}}|\leqslant 2^k\cdot k=2^k$.以F证明$\widetilde{\mathscr{W}}$是$p$的$\psi$远域基：

$\forall q\in\mathrm{M}$且$p\nleqslant q$.1°.若$q<p$，则由引理2.13，存在$e\in\mathscr{E}$ 使$q\leqslant e<p$，由T_1性，$e\in\eta(p)$.2°.若$q\nleqslant p$，则$q\in\mathscr{A}$，于是$q\leqslant\vee\mathscr{A}=A$.若$q\nleqslant\wedge V$，则存在$a\in\mathscr{A}$，使$q\nleqslant U_a$，由$V_a\vee U_a=1$，知$q\leqslant V_a\in\eta(p)$，$V_a\in\widetilde{V}$.若$q\leqslant\wedge V\wedge A$，则$q\leqslant\overline{\vee\mathrm{S}}$，故存在$\mathrm{E}=\{\mathrm{e}_i:i\in\mathrm{I}\}$是$\vee\mathrm{S}$中的网点（I是定向集）收敛于$q$.由$U_q\in\eta(q)$，存在$i_0\in\mathrm{I}$，当$i\geqslant i_0$时有$\mathrm{e}_i\nleqslant U_q$.对每个

$e_i\in E$，由 $e_i\leqslant\vee S$，存在$q_i\in S$，使$e_i\wedge q_i\neq 0$．由题设知 e_i 与q_i可比较大小，而q_i是极大点，故 $e_i\leqslant q_i$，从而当 $i\geqslant i_0$时，有$q_i\nleqslant U_q$，于是 $q_i\leqslant V_q$，V_q是闭元，故得到$q\leqslant\vee\overline{\{q_i:i\in I 且 i_0\leqslant i\}}\leqslant V_q\in\eta(p)$．

由上所述，$\psi(p,L)\leqslant 2^k$．由 p 的任意性，故得：$\psi(L)\leqslant 2^k=2^{S(L)}$．

引理2.16(Erdos［4］) 设 k 是无穷基数，X是一集，且 $(2^k)^+\leqslant|X|$，$f:[X]^2\to k$ 是任一映射，则存在$a_0\in k$，$Y\in[X]^{k^+}$，使得$f([Y]^2)=\{a_0\}$．它简化为$(2^k)^+\to(k^+)^2_k$．

引理2.17 设$(L(M),\eta)\in T_1$，$\forall p\in M$，集 $\mathscr{D}=\{q\in M:q\leqslant p\}$关于"$\leqslant$"是全序的，则有$|\mathscr{D}|\leqslant 2^{S(L)}$．

证 令$S(L)=k$，反设 $|\mathscr{D}|\geqslant(2^k)^+$．$\forall a\in\mathscr{D}$，由引理2.13，存在 $\{a^a_\beta:\beta\in k\}\subset\mathscr{D}$，满足 $\forall b\in\mathscr{D}$且$b<a$，存在$\beta\in k$，使得 $b\leqslant a^a_\beta<a$．定义$f:[\mathscr{D}]^2\to k$如次：$\forall\{a,b\}\in[\mathscr{D}]^2$．令$f(\{a,b\})=\min\{\beta:b\leqslant d^a_\beta<a\}$．由引理2.16，存在$a_0\in k$，$T\in[\mathscr{D}]^{k^+}$使得 $\forall\{a,b\}\in[T]^2$，有 $f(\{a,b\})=a_0$．可以证明，T是L上的离散集：$\forall a\in T$，对每个$b\in T$且$a\nleqslant b$，由全序关系，有$b<a$，故 $b\leqslant d^a_{a_0}<a$，于是得到$\vee\{b\in T:a\nleqslant b\}\leqslant d^a_{a_0}$，由$T_1$性，$d^a_{a_0}\in\eta(a)$，故T离散．但 $|T|=k^+$，矛盾于$S(L)=k$．

定理2.18 设$(L(M),\eta)\in T_{-1},T_2$，$S(L)=k$，且$\forall p\in M$，集合 $\mathscr{D}=\{q\in M:q<p\}$关于"$\leqslant$"是全序的，L的不同极大点不交，则存在$\mathscr{B}\subset M$，$|\mathscr{B}|\leqslant 2^k$使得

$$1=\vee\{\overline{\vee\mathscr{A}}:\mathscr{A}\in[\mathscr{B}]^{\leqslant k}\}.$$

证 $\forall p\in M$，由定理2.15，可设$\mathscr{V}_p=\{V_a:a\in 2^k\}$是 p 的ψ远域基，以下归纳构造序列$\{\mathscr{B}_a:a\in k^+\}\subset\mathscr{P}_{(M)}$ 以及$\{\mathscr{V}_a:a\in k^+\}\subset\mathscr{V}(\eta)$ 使满足：

1° $|\mathscr{B}_a|\leqslant 2^k$对 $\forall a\in k^+$成立．

2° $\mathscr{V}_a=\{V:V\in\mathscr{V}_p,\ p\in\bigcup_{\beta\in a}\mathscr{B}_a\}$；

3° $\forall a\in\mathscr{B}_a$，且$a'$是含 a 的极大点，则$a'\in\mathscr{B}_a$．

4° $\forall\mathscr{A}\in[\bigcup_{\beta\in a}\mathscr{B}_\beta]^{\leqslant k}$，$\mathscr{W}\in[\mathscr{V}_a]^{\leqslant k}$，若 $\wedge\mathscr{W}\nleqslant\overline{\vee\mathscr{A}}$，则$\wedge\mathscr{W}\wedge(\vee\mathscr{B}_a)\nleqslant\overline{\vee\mathscr{A}}$．具体构造如下：

设 $\forall\beta\in a$，$\mathscr{B}_\beta$已构造，对 $\forall\mathscr{A}\in[\bigcup_{\beta\in a}\mathscr{B}_\beta]^{\leqslant k}$，$\mathscr{W}\in[\mathscr{V}_a]^{\leqslant k}$，若 $\wedge\mathscr{W}\nleqslant\overline{\vee\mathscr{A}}$，取$a\in M$使$a\leqslant\overline{\wedge\mathscr{W}}$．且$a\nleqslant\overline{\wedge\mathscr{A}}$．设$p(\mathscr{A},\mathscr{W})$是含$a$之L的极大点，令$\mathscr{B}_a=\{b\in M:b\leqslant p(\mathscr{A},\mathscr{W}),\mathscr{A}\in[\bigcup_{\beta\in a}\mathscr{B}_\beta]^{\leqslant k}$，$\mathscr{W}\in[\mathscr{V}_a]^{\leqslant k}\}$，由引理2.17及归纳假设可得 $|\mathscr{B}_a|\leqslant 2^k\cdot(2^k)^k$，$(2^k)^k=2^k$，且不难验证，$\mathscr{B}_a$满足1°—4°，归纳构造完成．令 $\mathscr{B}=\bigcup_{a\in k^+}\mathscr{B}_a$，则 $|\mathscr{B}|\leqslant k^+\cdot 2^k=2^k$．以下证明，$\mathscr{B}$ 满足定理的要求。

我们只须证明，$\forall q\in M$且是极大点，存在 $\mathscr{A}\in[\mathscr{B}]^{\leqslant k}$，使$q\leqslant\overline{\vee\mathscr{A}}$．不妨设$q\notin\mathscr{B}$．$\forall p\in\mathscr{B}$设$p'$是含$p$之极大点，由3°，$p'\in\mathscr{B}$，故$p'\neq q$，则 $q\wedge p'=0$．于是$p\nleqslant q$．故存在$V_p\in\mathscr{V}_p$，使$q\leqslant V_p$．令$H=\vee\mathscr{B}$，$\mathscr{U}=\{V_p:p\in\mathscr{B}\}$，可证 $\wedge\mathscr{U}\wedge H=0$．事实上，$\forall p\in M$，若$p\nleqslant H$，由 $\mathscr{B}$ 的构造易知知 $p\wedge H=0$（否则，存在$a\in\mathscr{B}$且是极大点，有 $p\wedge a\geqslant c\neq 0$，设 p'是含 p 之极大点，则$p'\wedge a\neq 0$，且 $p'\neq a$，矛盾）．从而，不妨设$p\leqslant H$，由$\mathscr{B}$之构造可得 $p\in\mathscr{B}$．于是对应的$V_p\in\mathscr{U}\cap\mathscr{V}_p$，有 $p\nleqslant V_p$，故$p\nleqslant\wedge\mathscr{U}$．这就证明了$\mathscr{U}$是$H$的闭余覆盖．由 $S(L_H)\leqslant k$ 及引理2.11，存在 $\mathscr{W}\in[\mathscr{U}]^{\leqslant k}$，$\mathscr{A}\in[M_H]^{\leqslant k}\subset[\mathscr{B}]^{\leqslant k}$，使得$\wedge\mathscr{W}\wedge H\leqslant\overline{\vee\mathscr{A}}$．…（1）可以证明，$q\leqslant\overline{\vee\mathscr{A}}$：

否则，$q\nleq\overline{\bigvee\mathscr{A}}$．由$\mathscr{A}\leqslant k$，存在$a_0\in k^+$，使得 $\mathscr{A}\in[\bigcup_{\beta\in a_0}\mathscr{B}_\beta]^{\leq k}$；由 $|\mathscr{W}|\leqslant k$，不妨令 $\mathscr{W}\in[\mathscr{V}_{a_0}]^{\leq k}$．由$q\leqslant\wedge\mathscr{U}\leqslant\wedge\mathscr{W}$，知 $\wedge\mathscr{W}\nleq\overline{\bigvee\mathscr{A}}$，由4°得 $\wedge\mathscr{W}\wedge(\bigvee\mathscr{B}_{a_0})\nleq\overline{\bigvee\mathscr{A}}$，即有 $\wedge\mathscr{W}\wedge H\nleq\overline{\bigvee\mathscr{A}}$，这与(1)式矛盾．

推论2.19 在定理2.18的条件下，有 $|\mathrm{M}|\leqslant\exp\exp S(\mathrm{L})$．

证 令$S(\mathrm{L})=k$，由[2]定理4.4，不难证明，$\forall\mathscr{A}\in[\mathrm{M}]^{\leq k}$，$|\overline{\bigvee\mathscr{A}}|\leqslant\exp\exp d(\overline{\bigvee\mathscr{A}})\leqslant\exp\exp k$，($d(\overline{\bigvee\mathscr{A}})$是$\overline{\bigvee\mathscr{A}}$的稠度，见[2])．故由定理2.18可得 $|1|\leqslant(\exp\exp k)^{2^k}=\exp\exp k$．令 $U=\{a\in\mathrm{M}:a$是L上的极大点$\}$，当然 $|U|=|1|$．对每个$a\in U$，令 $\mathscr{D}_a=\{b\in\mathrm{M}:b\leqslant a\}$，由引理2.17，可得 $|\mathscr{D}_a|\leqslant 2^k$．显然 $\mathrm{M}=\bigcup_{a\in U}\mathscr{D}_a$，于是 $|\mathrm{M}|\leqslant|U|\cdot 2^k=\exp\exp k$．

定义2.20 设$(\mathrm{L}(\mathrm{M}),\eta)$是TML，定义$hd(\mathrm{L})\acute{=}\sup\{d(\mathrm{L}_H):H\in\mathrm{L}\}$，$hd(\mathrm{L})$称为L上的遗传稠度．

引理2.21 设$(\mathrm{L}(\mathrm{M}),\eta)$是TML，则 $o(\mathrm{L})\leqslant|\mathrm{M}|^{hd(\mathrm{L})}$．

证 令 $hd(\mathrm{L})=k$，$\forall B\in\eta$，有$d(\mathrm{L}_B)\leqslant k$．于是，存在 $\varphi_B\subset\mathrm{M}_B\subset\mathrm{M}$，$|\varphi_B|\leqslant k$，使$\overline{\bigvee\varphi_B}=B$．令 $f:\eta\to[\mathrm{M}]^{\leq k}$，$B\to\varphi_B$，显然$f$是单射．于是$o(\mathrm{L})=|\eta|\leqslant|M|^k$．

定理2.22 若$(\mathrm{L}(\mathrm{M}),\eta)$是TML，且满足定理2.18的条件，则 $hd(\mathrm{L})\leqslant 2^{S(\mathrm{L})}$．

证 令$S(\mathrm{L})=k$，由定理2.18，存在$\mathscr{B}\subset\mathrm{M}$，$|\mathscr{B}|\leqslant 2^k$使 $1=\bigvee\{\overline{\bigvee\mathscr{A}}:\mathscr{A}\in[\mathscr{B}]^{\leq 2^k}\}\leqslant\overline{\bigvee\mathscr{B}}$，故 $d(\mathrm{L})\leqslant 2^k$．由离散度的单调性，知$\forall H\in\mathrm{L}$，$d(\mathrm{L}_H)\leqslant 2^k$，从而得$hd(\mathrm{L})\leqslant 2^k$．

推论2.23 若$(\mathrm{L}(\mathrm{M}),\eta)$是TML，且满足定理2.18的条件，则 $o(\mathrm{L})\leqslant\exp\exp S(\mathrm{L})$．

证 令$S(\mathrm{L})=k$，由2.21，2.19及2.22，得 $o(\mathrm{L})\leqslant|\mathrm{M}|^{hd(\mathrm{L})}\leqslant\exp\exp k$．

参 考 文 献

[1] 王国俊，完全分配格上的点式拓扑，陕西师范大学学报，1985，Ⅰ，Ⅱ．

[2] 刘晓石，格上点式拓扑的基数函数，《数学研究与评论》，(1986年第三期)．

[3] P. Erdös, A. Hagnal, R. Rado, Partition Relations for Cardinai nambers, Acta. Math. Acad. Sci. Hunger. 16(1965) 93—196.

[4] P. Erdös and R. Rado, A Partition Calculus in Set Theory, Bull, Amer. Math. Soc. 62(1956) 427—489.