第9卷 第2期
1989年5月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.9 No.2
May, 1989

共轭广义对角占优矩阵的特征值分布*

游兆永 李 磊

（西安交通大学数学系）

文献[1]和[2]分别给出了复方阵A在准严格对角占优和共轭准严格对角占优（由定义知它包含了严格对角占优类和共轭严格占优类）条件下的特征值分布．[6]对此作了进一步的研究．这些结果对矩阵特征值理论和特殊矩阵理论有着重要的意义．

本文导出了复方阵A在广义对角占优和共轭广义对角占优条件下的特征值分布．由于广义对角占优矩阵类和共轭广义对角占优矩阵类分别严格包含了准严格对角占优矩阵类和共轭准严格对角占优矩阵类[5]，因而，本文拓广了[1]、[2]、[6]的结果．

定义1 若存在正对角阵D使AD成为严格对角占优矩阵，则称A为广义对角占优矩阵．

定义2 记$T=\dfrac{A+A^H}{2}$，若T为广义对角占优矩阵，则称A为共轭广义对角占优矩阵．

推论1 i）若A为准严格对角占优矩阵（定义见文[2]），则A为广义对角占优矩阵．

ii）若$A\in GD$（定义见文[6]），则A为广义对角占优矩阵．

iii）A为广义准对角占优（见[6]定义2）的充要条件是A为广义对角占优．

iv）若$A\in GC$（见[6]定义3），则A为共轭广义对角占优矩阵．

证明 i）实际上，[2]中定义的准严格对角占优矩阵就是[5]中的具非零元素链对角占优矩阵，因而由[5]的结论，A必为广义对角占优矩阵（并且严格含于后者）．

ii）设A的比较矩阵为$B=(b_{ij})$，$b_{ii}=|a_{ii}|$，$i=1,2,\cdots,n$，$b_{ij}=-|a_{ij}|$，$i\neq j$，则由[5]的结论知B为M矩阵，从而B是广义对角占优阵，亦即A是广义对角占优阵．

iii）显然，由[6]的定义2，A为广义准对角占优矩阵的充要条件是存在正对角阵E使$E^{-1}AE\in GD$，但GD矩阵类介于严格对角占优矩阵类和广义对角占优矩阵类之间，由[7]的结论，当且仅当A为广义对角占优矩阵．

iv）由ii），显然．

根据推论1的ii），易知[6]的定理3已含于文[5]的有关结论．

定理1 若$A=(a_{rs})_{n\times n}$为广义对角占优矩阵，a_{rr}，$r=1,2,\cdots,n$，皆为实数，则A的实部为正、负的特征值个数与a_{rr}，$r=1,2,\cdots,n$中正、负数的个数相同．

证明 因A为广义对角占优矩阵，故存在正对角阵D，使AD为（按行）严格对角占优矩

* 1987年5月11日收到．

阵，从而$B=D^{-1}AD$仍是(按行)严格对角占优矩阵，B的对角元$b_{rr}=a_{rr}$，$r=1,2,\cdots,n$，皆为实数，根据文[1]的结论，B的实部为正、负的特征值个数与a_{rr}，$r=1,2,\cdots,n$中正、负数的个数相同，但B相似于A，B的特征值集合等于A的特征值集合：$\{\lambda(B)\}=\{\lambda(A)\}$，故结论成立．

定理2 若$A=(a_{rs})_{n\times n}$为共轭广义对角占优矩阵，且对$r=1,2,\cdots,n$，皆有$\mathrm{Re}\,a_{rr}>0$，则A的特征值λ_r的实部皆为正，$\mathrm{Re}\,\lambda_r>0$，$r=1,2,\cdots,n$．

证明 由定义2，$B=\frac{1}{2}(A+A^H)$为广义对角占优矩阵，但B是实对称矩阵，主对角元$b_{rr}=\mathrm{Re}\,a_{rr}>0$，因而$B$的特征值均为实数，记$\lambda_r(B)$，$r=1,2,\cdots,n$．由定理1，$\lambda_r(B)>0$，$r=1,2,\cdots,n$，再根据[2]的引理2，便得$\mathrm{Re}\,\lambda_r(A)>0$，$r=1,2,\cdots,n$．

显然，本文定理1推广了[1]的有关结论，并包含了[6]的定理1和定理1a，本文定理2推广了[2]的定理1，包含了[6]的定理2．[2]指出，当A为共轭准对角占优时，没有类似于定理1结论的一般性定理，但当A为正规矩阵时，[2]的定理2表明类似结论仍然成立．下面的定理3推广了这些结论的应用范围．

定理3 若$A=(a_{rs})_{n\times n}$满足$AA^H=A^HA$，A为共轭广义对角占优矩阵，且$\mathrm{Re}\,a_{rr}$，$r=1,2,\cdots,n$中有p个为正，q个为负，则A的特征值中有p个实部为正，q个实部为负，且$p+q=n$．

证明 由定义$B=\frac{1}{2}(A+A^H)$为广义对角占优阵，$b_{rr}=\mathrm{Re}\,a_{rr}$均为实数，且有$p$个为正，$q$个为负，根据定理1，$B$的特征值中有$p$个为正，$q$个为负，又$B$的特征值集合$\{\lambda(B)\}$等于$A$的特征值实部的集合$\{\mathrm{Re}\,\lambda(A)\}$[3]，从而定理得证．

注1 在[4]中，我们曾列出广义对角占优矩阵的若干实用且应用范围较宽的判别条件，显然，结合这些判别条件，容易得到判别矩阵的特征值分布的若干简便的充分条件．

参 考 文 献

[1] 佟文廷，关于几类矩阵的特征值分布，数学学报，20:4(1977).272—275.

[2] 张家驹，共轭对角占优矩阵的特征值分布，数学学报，23:4(1980).544—546.

[3] Гантмахер Ф.Р.著，柯召译，矩阵论，高等教育出版社，1955.

[4] 李磊，西安交通大学博士学位论文，1988.

[5] 游兆永，非奇M矩阵，华中工学院，1981.

[6] 杨载朴，数学研究与评论，Vol.5.No.4(1985).21—24.

[7] 姜宗乾，李磊，关于M矩阵的条件，西安交通大学学报，No.2(1985).113—116.