第9卷 第2期
1989年5月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.9 No.2
May, 1989

关于“A family of maximal subgroups containing the Sylow subgroups and some solvability conditions”一文的注记*

张宝林　郭秀云

（山西大学数学系，太原）

在［1］中作者指出：讨论有限群的Frattini子群的各种各样的推广是人们感兴趣的问题．并研究了一类特殊的极大子群对有限群G的结构的影响，但是文中两个主要结果有误，我们用两个例子来说明，并给出这两个结果成立的条件。

为方便我们复述如下的定义以及［1］中的定理1.4和定理1.8.

设p是素数，G是有限群，又设$\mathscr{S}:=\{M<\cdot G \mid [G:M]$是合数 且$[G:M]_p=1\}$．其中$M<\cdot G$表示$M$是G的极大子群，$[G:M]_p$表示指数$[G:M]$的$p$部分．

定义 $S_p(G)$：若$\mathscr{S}$不是空集，$S_p(G)=\bigcap\{M \mid M\in\mathscr{S}\}$；若$\mathscr{S}$是空集，$S_p(G)=G$．

定理1.4 设p是任一素数，G为有限群，若$S_p(G)=G$，则G是超可解型的Sylow塔群．

定理1.8 设p是素数，G为有限群，使得如下的条件成立．

（**） 若$H, K, L\leqslant G$使$L=HK$，则$S_p(L)=S_p(H)S_p(K)$

于是G是超可解型的Sylow塔群．

下面的例1、例2说明定理1.4不真，例3说明定理1.8不真．

例1 设G是五个文字上的五次交代群A_5，显然G的包含2-Sylow子群的极大子群只能是12阶子群，因而$S_2(G)=G$，但G是单群．

即使限制p是奇素数，定理1.4也不会成立．

例2 设A是3^3阶初等Abel群，则A有阶为13的自同构，设为a，故$\langle a\rangle$作用在A上，即有半直积$G=\langle a\rangle \ltimes A$，显然$|G|=3^3\cdot 13$，$\langle a\rangle \ntrianglelefteq G$，即G不是超可解型的Sylow塔群，但是$S_3(G)=G$．

例3 设G是四个文字上的四次交代群A_4，显然A_4不是超可解型的Sylow塔群，下面我们说明（**）成立．

因为G的真子群只能是2-群和3-群，于是对G的任一真子群N，都有$S_2(N)=N$，若L是G的真子群，由$L=H\cdot K$都有

$$S_2(L)=S_2(H)S_2(K)．$$

* 1987年3月24日收到．山西省科研基金资助．

当 $L=G$ 时，我们只考虑 $H\in S_y|_2G$，$K\in S_y|_3G$ 的情形，显然 $S_2(G)=G$，$S_2(H)=H$，$S_2(K)=K$，故由 $G=H\cdot K$ 也有

$$S_2(G)=S_2(H)S_2(K)$$

考察[1]中定理1.4和定理1.8的证明，不难发现，错误的原因是在引用文[1]中的(2.2)，因为(2.2)的结论是在 p 是 $|G|$ 的最大素因子的前提下得出的，而定理1.4,定理1.8中的素数 p 都并非如此，因而上述定理可以改写为

定理 1 设 p 是 $|G|$ 的最大素因子，且 $S_p(G)=G$，则G是超可解型的Sylow塔群.

证明 由于 $S_p(G)=G$，这表明下述集合

$$\mathscr{S}=\{M<\cdot G\,|\,[G:M]_p=1 \text{ 且 } [G:M] \text{ 是合数}\}$$

是空集. 设 $P\in S_y|_pG$，我们断言 $P\trianglelefteq G$，事实上，若 $N_G(P)<G$，则有G的极大 f 群S，使 $N_G(P)\leq S$，因而 $N_G(P)=N_S(P)$，由Sylow定理可得

$$[G:S]=1+kp \quad (\text{其中 } k \text{ 为整数})$$

再注意到 $\mathscr{S}$ 是空集，故必有素数 q，使 $[G:S]=q$，即得

$$1+kp=q$$

这与 p 是 $|G|$ 的最大素因子矛盾.

我们考虑商群 G/P，并设 r 是整除 $|G/P|$ 的最大素因子，以及

$$\mathscr{S}_1=\{M/P<\cdot G/P\,|\,[G/P:M/P]_r=1 \text{ 且 } [G/P:M/P] \text{ 是合数}\}$$

由于 $\mathscr{S}$ 是空集，不难知道 $\mathscr{S}_1$ 也是空集，故 $S_r(G/P)=G/P$，由归纳法 G/P 是超可解型的Sylow塔群，即得G是超可解型的Sylow 塔群.

定理 2 设 p 是 $|G|$ 的最大素因子，若(**)成立，则G是超可解型的 Sylow塔群.

我们只证明定理 1，定理 2 可仿[1]中定理1.8的证明导出 $S_p(G)=G$，由定理 1 即得.

参 考 文 献

[1] Prabir Bhattacharya and N. P. Mukherjee, A family of maximal subgroups containing the Sylow subgroups and some solvability conditions, Arch. Math., 45(1985)390—397.