第9卷 第2期
1989年5月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.9 No.2
May, 1989

关于F－环的一点注记*

陈建龙　　赵永千

（安徽师范大学数学系．芜湖）

一个环称为F 环［1］，如果环R中含有一个有限非零元集X，使得对任何非零aR与X之交不空（非零）．如果在上面的假设下，X还在R的中心Z（R）中，则称R为FZ 环．关于F－环，文［1］、［2］给出了一些结果．本文主要结果是：

1．说明文［2］中定理的充分性不真．文［2］的主要定理是：R为半素F－环，当且仅当R为有限个除环上的方阵环的直和．

2．说明非奇异F－环未必是半单环．

3．非奇异FZ－环的结构．即我们将要证明：R为非奇异FZ－环．当且仅当R为有限个除环的直和．

一、Artin半单环未必是F－环

例1　Q为有理数域，$R=M_2(Q)$为Q上的二阶方阵环，则R为Artin单环．我们说R不是F－环．否则，存在一个R的有限集M，使对任意非零aR，$a\mathrm{R}\cap M\neq 0$．取

$a_n=\begin{bmatrix} n & 0 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\in$R，$n$为自然数，从而存在$\begin{bmatrix} x_n & y_n \\ z_n & p_n\end{bmatrix}\in$R．使

$$0\neq A_n=\begin{bmatrix} n & 0 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_n & y_n \\ z_n & p_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} nx_n & ny_n \\ x_n & y_n\end{bmatrix}\in M.$$

若有$m\neq n$，使$A_m=A_n$，那么$x_m=x_n$，$mx_m=nx_n$，从而$x_n=0$，同理$y_n=0$．这与A_n不等于零矛盾．所以，$A_1, A_2, A_3, \cdots A_n\cdots$，是$M$的互不相同的元素，与$M$为有限集矛盾．故R不是F 环．

但，我们容易验证：若M_n(R)为F－环，则R一定是F 环．

二、非奇异F－环未必半单

我们知道，一个环称为（右）非奇异，如果（右）奇异理想SingR＝0．这里SingR＝$\{x\in\mathrm{R};\ annx$为R的本质右理想$\}$，$annx$表示x的右零化子，参看［4］．我们说，（右）非奇异F－环未必是半单环．

* 1987年7月10日收到．

例 2 设R为Z/(2)上全体上三角二阶方阵构成的环，则R为非奇异F－环，但R不半素，从而不半单．这是因为R为有限环，当然为F－环．由于 $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}R\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=0$．所以R不半素，从而不半单．下证R为非奇异，即 $\forall\ 0\neq a\in \mathrm{R}$，$anna$ 不本质．

若 $a=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ 或 $a=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$，或 $a=\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}$，则 $anna=\left\{\begin{bmatrix}x&y\\0&0\end{bmatrix};\ x,y\in \mathrm{Z}/(2)\right\}$．

令 $b=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$，则 $b\mathrm{R}\cap anna=0$；

若 $a=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ 则 $anna=\left\{\begin{bmatrix}0&0\\0&m\end{bmatrix},m\in \mathrm{Z}/(2)\right\}$．令 $b=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，则 $b\mathrm{R}\cap anna=0$．

若 $a=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$，$anna=\left\{\begin{bmatrix}0&y\\0&m\end{bmatrix};\ y+m=0\right\}$．令 $b=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$，则 $b\mathrm{R}\cap anna=0$；

若 $a=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ 或 $a=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$，则 $anna=0$．此时，令 $b=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，则 $b\mathrm{R}\cap anna=0$．

这样，对任何 $0\neq a\in \mathrm{R}$，有 $0\neq b\mathrm{R}$．使 $b\mathrm{R}\cap anna=0$．即 $anna$ 不是本质右理想，所以，R为非奇异环．

但，对于FZ－环，我们有如下的结果

三、非奇异FZ—环的结构

定理 R为非奇异FZ－环，当且仅当R为有限个除环的直和．

证明 若R为有限个除环的直和．显然R为非奇异．又除环为FZ－环，而FZ－环的有限直和为FZ－环，故充分性得证．

若R为非奇异FZ－环．先证R为半素环．设 $a\in \mathrm{R}$，$a\mathrm{R}a=0$，我们来证明 $a=0$．对任何 $x\mathrm{R}\neq 0$，因R为FZ－环，有R的有限集 $M\subseteq \mathrm{Z}(\mathrm{R})$．使 $x\mathrm{R}\cap M\neq 0$，即存在 $b\in \mathrm{R}$ 使 $0\neq xb\in M$．

如果 $xba=0$，因 $xb\in \mathrm{Z}(\mathrm{R})$，$a(xb)=0$，故 $xb\in x\mathrm{R}\cap anna$；

如果 $xba\neq 0$，因 $a\mathrm{R}a=0$，$a(xb)a=0$，故 $xba\in x\mathrm{R}\cap anna$．

总之，$x\mathrm{R}\cap anna\neq 0$，即 $anna$ 为R的本质右理想．但R为非奇异环，故 $a=0$，所以R为半素环．因而，由[1]知，R为有限个除环的直和．

推论 若R为FZ－环，则R非奇异，当且仅当R半素．

参考文献

[1] 姚学，关于F－环，数学研究与评论，Vol.4，No.4(1984) pp77—78.

[2] 周毅强，半素F－环的结构，数学研究与评论，Vol.7，No.2(1987) pp321—322.

[3] 刘绍学，环与代数，科学出版社（1983）．

[4] C.Faith. Algebra I :Rings, Modules, and Categories .Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York (1981).