第9卷 第3期
1989年8月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.9 No.3
Aug., 1989

关于有限生成投射模为自由模的环*

佟 文 廷

(南京大学数学系)

摘 要

若环R上一切有限生成投射模都是自由模，则称R为PF环，本文讨论了PF环的一些性质及其一些应用．

§1 引言与记号

如众周知，环上的投射模是自由模的一种成功的推广，在同调代数、代数几何以及环论的研究中都占有重要地位．D．Quillen在[1]中、A．A．Suslin在[2]中同时证明了：设R为一个主理想整环上的关于n个未定元的多项式环，则一切有限生成投射R-模都是自由R-模，从而对著名的Serre猜测(见[3])给出了一个肯定的回答．A．A．Suslin与D．Quillen的这一结果对向量丛的研究具有重要意义(见[4])，因此研究有限生成投射模为自由模的环是十分必要的．为叙述简便起见，我们先列出作者在[5]中给出的如下定义：

定义 设环R上一切有限生成投射模都是自由模，则称R为PF环，记为$R\in$PF．

这是一类重要的环，因为它具有很好的范畴性质．比如，可以证明(见[6]，P.115)：若$R\in$PF，则环S与R Morita等价的充分必要条件是存在自然数n使$S\simeq R^{n\times n}$．而对一般的环这只是S与R Morita等价的一个充分条件，并非必要条件．

由[7]知，主理想整环上的n元多项式环、域上的幂级数环，局部环，Bezout环，PID(主理想整环)等都是PF环．由Quillen-Suslin的结果与同调代数中的换环理论知，对任一正整数n，都有整体(同调)维数为n的PF环存在．

本文的主要目的是给出PF环的一些性质与应用．在本文中，我们用D, H, SH, N, SS, RE, IBN, PID分别表示可换整环，遗传环，半遗传环，Noether环，(Artin)半单环，(von Neumann)正则环，不变基数环(见[8])以及主理想整环的环类．用PSF表示一切有限生成投射模都是准自由(stable free)模的环类，用UCP表示有么模列性质(unimodular column property)的环类，而用$\mathscr{F}$表示域的类，用S$\mathscr{F}$表示除环(体)的类．用$gD(R)$，$wD(R)$分别表示环R的(左)整体同调维数与弱同调维数．本文中的环均指酉环，未加特别说明时均指可换酉环．模，均指酉模．对非可换环上的模均指左模．

* 1987年8月31日收到．国家自然科学基金资助项目．

§2　PF 环的一些性质

在[5]中，我们已经证明了如下结果：

命题1　(1) $\mathrm{UCP}\cap\mathrm{PSF}=\mathrm{PF}$，

(2) $R\in\mathrm{PSF}\Leftrightarrow K_0(R)\simeq\mathbf{Z}$　其中 $K_0(R)$ 为环 R 的Grothendieck群，对可换环 R，它有环结构，$\mathbf{Z}$ 表示整数环.

由此可知：若 $R\in\mathrm{PF}$，则 $K_0(R)\simeq\mathbf{Z}$.

现在来证如下结果.由此知，整体维数为0的可换PF环即弱维数为0的Noether可换PF环.它们都是域的特征刻划.

命题2　对可换环，下述各点是等价的：

(1) $R\in\mathrm{D}$ 且 $gD(R)=0$；

(2) $R\in\mathrm{PID}$ 且 $gD(R)=0$；

(3) $R\in\mathscr{F}$；

(4) $R\in\mathrm{PF}\cap\mathrm{RE}\cap\mathrm{N}$，即 $R\in\mathrm{PF}\cap\mathrm{N}$ 且 $wD(R)=0$.

(5) $R\in\mathrm{PF}\cap\mathrm{SS}$，即 $R\in\mathrm{PF}$ 且 $gD(R)=0$.

因此，$\mathrm{D}\cap\mathrm{SS}=\mathrm{PID}\cap\mathrm{SS}=\mathrm{PF}\cap\mathrm{RE}\cap\mathrm{N}=\mathrm{PF}\cap\mathrm{SS}=\mathscr{F}$.

证明　(1)⇒(2)：只需证 R 的一切非零理想都是主理想.事实上，设 $0\neq I\lhd R$，由 $gD(R)=0$ 即 $R\in\mathrm{SS}$ 知 I 为 R 的直和分量，即有 $J\lhd R$ 使 $R=I\oplus J$.于是 $1=(a,b)$，$a\in I$，b $b\in J$.故 $I=(a)$，即 I 为 R 的主理想.

(2)⇒(3)：若(2)成立，则 R 为可换半单环，由Wedderburn定理知

$$R\simeq\bigoplus_{j=1}^{n}F_j\ ,\quad F_j\in\mathscr{F}.\quad j=1,\cdots,n.$$

但 $R\in\mathrm{PID}$，因此由[9]知 $K_0(R)\simeq\mathbf{Z}$.但由[9]又知

$$K_0(R)\simeq K_0(\bigoplus_{j=1}^{n}F_j)\simeq\mathbf{Z}\underbrace{\oplus\cdots\oplus}_{n}\mathbf{Z}$$

于是，必有 $n=1$，即 $R\in\mathscr{F}$.

(3)⇒(4)是显见的.

(4)⇒(5)：由[10，P.89]知 $\mathrm{SS}=\mathrm{RE}\cap\mathrm{N}$.因此(4)⇒(5).

(5)⇒(1)：由"(1)⇒(2)"之证知：若 $R\in\mathrm{SS}$，$0\neq I\lhd R$，则必有 $J\lhd R$ 使 $R=I\oplus J$.于是 I,J 均为有限生成投射生成投射 R-模，而 $R\in\mathrm{PF}$，因此有非负整数 i,j 使 $I\simeq R^i$，$J\simeq R^j$ 由此知 $R\simeq R^{i+j}$.但 $\mathrm{SS}\subset\mathrm{N}\subset\mathrm{IBN}$，于是 $i+j=1$.这只能是 $I=R$，$J=0$.由此知 R 为可换单环，即域.此时当然有 $R\in D$，且 $gD(R)=0$.从而命题证毕.

注意无零因子单环即除环，仿上证又得如下结果：

推论1　设 R 为无零因子环，则下述各点是等价的：

(1) $gD(R)=0$；

(2) $gD(R)=0$ 且 R 为(左)主理想环；

(3) $R\in\mathrm{S}\mathscr{F}$；

(4) $R\in\mathrm{PF}\cap\mathrm{RE}\cap\mathrm{N}$；

（5）$R\in \mathrm{PF}\cap \mathrm{SS}$.

对唯一分解整环(UFD)我们可得如下结果：

命题3 设$R\in \mathrm{UFD}$，则

（1）$gD(R)<\infty$时，$R\in \mathrm{PF}$，为此 $K_0(R)\simeq \mathbf{Z}$，

（2）$gD(R)=\infty$时，$\mathbf{Z}$同构于$K_0(R)$的一个直和分量.

证明 （1）由于UFD或为PID或为PID上的多项式环(不定元个数可以无穷)(比如见[11]). 而$gD(\mathrm{PID})\leqslant 1$，于是由[7]之定理9.34($gD(R[X])=gD(R)+1$)知：当$R\in \mathrm{UFD}$且$gD(R)<\infty$时，必有$A\in \mathrm{PID}$与$n<\infty$，使$R=A[X_1,\cdots,X_n]$. 故由Qiullen-Suslin 定理知$R\in \mathrm{PF}$. 再由命题1知 $K_0(R)\simeq \mathbf{Z}$.

（2）若$R\in \mathrm{UFD}$，$gD(R)=\infty$，则由上段知必有$A\in \mathrm{PID}$，使$R=A[X_1,\cdots,X_n,\cdots]\equiv R_\infty$. 记$R_\lambda=A[X_1,\cdots,X_\lambda]$，$\lambda<\infty$. 令$f:R_\lambda\to R_\infty$为嵌入映射，而定义环同态$g:R_\infty\to R_\lambda$，使$g(X_j)=0$. $\forall j>\lambda$，且g在R_λ上的限制为恒等映射，则对环同态f,g有$gf=1$. 由[9]之命题5知

$$K_0(R_\infty)=K_0(R)\simeq K_0(R_\lambda)\oplus \mathrm{Ker}(K_0 g)\simeq \mathbf{Z}\oplus \mathrm{Ker}(K_0 g),$$

其中$K_0 g$为g诱导的从$K_0(R_\infty)$到$K_0(R_\lambda)$的环同态. 因此，$\mathbf{Z}$同构于 $K_0(R)$的一个直和分量量. 命题证毕.

§3 对模的自同态与张量积的应用

先证一条引理，从中也可看出R-模R的自同态性质对R的环性质的影响.

引理1 设R为环(未必可换)，若作为R-模，R的非零自同态全为单同态，则R无(非零)零因子.

证明 定义$f_r(x)=rx$，$\forall x\in R$，$0\neq r\in R$，容易验知f_r为R-模R的自同态. 由于$r\neq 0$，f_r为非零自同态(注意R有单位元). 若对任意的$0\neq r\in R$，f_r均为单同态，则$rx=0\Leftrightarrow x=0$. 即R无零因子.

对弱维数$\leqslant 1$的PF环，我们可得如下结果：

命题4 设环(未必可换)$R\in \mathrm{IBN}\cap \mathrm{PF}\cap \mathrm{SH}$，则$R$-模$R$的非零自同态$f$全为单同态，因此$R$无零因子. 此外，$\mathrm{Im}f\simeq R$.

证明 设f为R-模R的非零自同态，则$\mathrm{Im}f\neq 0$且

$$0\to \mathrm{Ker}f\to R\xrightarrow{f}\mathrm{Im}f\to 0.$$

为R-模正合列，同时$\mathrm{Ker}f$，$\mathrm{Im}f$均为R的左理想. 又由$R\xrightarrow{f}\mathrm{Im}f$为满射，知$\mathrm{Im}f$为有限生成成的(事实上是左主理想). 于是由$R\in \mathrm{SH}$知$\mathrm{Im}f$为有限生成投射$R$-模. 但$R\in \mathrm{PF}$，因此$\mathrm{Im}f$又是有限生成自由$R$-模. 再由投射模性质与上述正合列知

$$R\simeq \mathrm{Im}f\oplus \mathrm{Ker}f.$$

因此，$\mathrm{Ker}f$也是有限生成投射R-模. 与上证同理知，$\mathrm{Ker}f$又是有限生成自由R-模. 所以，必有$i,j\geqslant 0$使$\mathrm{Im}f\simeq R^i$，$\mathrm{Ker}f\simeq R^j$. 于是

$$R\simeq R^{i+j}$$

但由设又知$R\in \mathrm{IBN}$，因此$i+j=1$. 而$\mathrm{Im}f\neq 0$，这只能是$\mathrm{Im}f\simeq R$，$\mathrm{Ker}f\simeq 0$. 故f为单同态. 最后由引理1知R无零因子. 命题证毕.

由此命题立得

推论 2 设可换环$R\in$PF$\cap$SH，则R-模R的非零自同态f必为单同态，因此R为Prüfer环．此外，Im$f\simeq R$．

证明 由命题4(注意可换环为IBN环)知$R\in$D．于是由Prüfer环的定义即得欲证．

注1 注意到①．$R\in$D为Prüfer环$\Leftrightarrow$每一个有限生成非挠R-模均为投射R-模；②．R为Prüfer环时，平坦R-模与非挠R-模是一致的(见[7])，由推论2可得出可换环$R\in$PF$\cap$SH时的一些模性质．

联系到UFD，我们可以得到如下结果：

命题 5 设$R\in$PF$\cap$UFD，则R-模R的非零自同态f必为单同态，且Im$f\simeq R$．

证明 由[7]之定理4.28，因为$R\in$UFD，于是R的理想I为投射R-模$\Leftrightarrow I$为主理想．由命题4之证知Imf为R的主理想，因此Imf为有限生成投射R模．而R可换保证了$R\in$IBN，故与命题4之证同理可得Im$f\simeq R$，且f为单同态．

注 2 命题5中的结论Im$f\simeq R$不能加强为Im$f=R$．例如Z$\in$PID，因此Z$\in$PF$\cap$UFD，令$f:R\to R$，使$f(n)=2n$，$\forall n\in$Z，则Im$f=(2)\simeq$Z，但Im$f\neq$Z．

由UFD的性质与Quillen-Suslin定理，用命题5立得如下推论：

推论 3 设$A\in$PID，$R=A[X_1,\cdots,X_n]$，则R-模R的非零自同态f必为单同态，且Im$f\simeq R$．

命题6 设$R\in$PF$\cap$IBN，f为R-模R上的非零幂等自同态(即$f^2=f\neq 0$)，则f为R-模同构．

证明 任取$0\neq b\in$Imf，则有$a\in R$使$b=f(a)$．于是由$f^2=f$知

$$f(b)=f^2(a)=f(a)=b\neq 0.$$

因此，$b\notin$Ker$f$．由此知Im$f\cap$ker$f=0$．另一向面，设$c\in R$，则

$$c=(c-f(c))+f(c),$$

注意：$f(c-f(c))=f(c)-f^2(c)=f(c)-f(c)=0$，因此，$c-f(c)\in$Ker$f$，而$f(c)\in$Im$f$，由此知$R=Imf+Kerf$，再由上证之Im$f\cap$Ker$f=0$ 即得

$$R=\mathrm{Im}f\oplus\mathrm{Ker}f$$

于是Imf与Ker$f$均为有限生成投射R-模．但是$R\in$PF$\cap$IBN．故由命题4之证中有关部分知Im$f=R$，Ker$f=0$，即f为R-模同构．命题证毕．

同样地，注意到可换环为IBN环，由命题6立得如下推论：

推论 4 设R为可换PF环，f为R-模R上的非零幂等自同态，则f为R-模同构．

推论 5 设$R\in$RE$\cap$PF$\cap$IBN，则R无非平凡的有限生成单侧理想．因此，更无非平凡的有限生成理想．

证明 反设R有有限生成左理想I，$I\neq 0$，则由$R\in$RE知，I为R的直和分量(作为左R-模，见[12]p.176)，再由[12]，p.71知，必有R-模R的幂等自同态f，使$I=$Imf．但由$R\in$PF$\cap$IBN用命题6知(注意$I\neq 0$)，$I=$Im$f=R$．因此，R无非平凡的有限生成(单侧)理想．

注 3 注意N$\subset$IBN，且$R\in$N时R之理想均为有限生成的，推论5对可换环应用，又立即得到命题2中的结果$\mathscr{I}=$PF$\cap$RE$\cap$N．

下面用$\chi(M)$表示R-模M的Euler特征标．在[13]中，我们已得到如下结果．

引理 2 设P为可换环，M，N为准自由R-模，则

$$\chi(M\otimes N)=\chi(M)\chi(N)$$

由此引理，我们可得如下命题：

命题 7 设可换环$R\in$PSF，M，N为有限生成投射R-模，则

$$\chi(M\otimes N)=\chi(M)\chi(N)$$

证明 由$R\in$PSF知，有限生成投射R-模M，N都是准自由R-模，于是由引理 2 即得欲证.

最后，注意当可换环$R\in$PF时，由命题 1 知$R\in$PSF．因此，此时的命题 7 正好缩化为自由模的Euler特征标的上述关系式．

参 考 文 献

[1] D. Quillen, Inv. Math. 36(1976), 167—171.

[2] A.A.Suslin, Soviet Math. Dokl. 17(1976), 1160—1164.

[3] J.—P. Serre, Ann Math., 61(1955), 197—278.

[4] 周伯埙，南京大学学报数学半年刊，1(1987)，91—98.

[5] 佟文廷，南京大学学报数学半年刊，1(1986)，1—11.

[6] P.M.Cohn, Algebra, Ⅱ, John Wiley and Sons, 1979.

[7] J.J.Rotmann, An Introduction to Homological Algebra, Acad. Press, New York, San Francisco, London, 1979.

[8] 佟文廷，南京大学学报数学半年刊，2(1984)，217—223.

[9] J.R.Silvester, Introduction to Algeraic K Theory, Chapman and Hall, London and New York, 1981.

[10] J.J.Rotmann, Notes on Homological Algebra, van Nostrand Reinhold Comp. New York, 1970.

[11] 谢邦杰，抽象代数学，上海科技出版社，1982.

[12] F.Anderson, K.Fuller, Rings and Categories of Modules, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1974.

[13] Tong Wenting (佟文廷), Chin. Ann. AMath. 10B(1), 1989, 58—63.

Rings in which finitely generated projective modules are free

Tong Wenting

Abstract

If R is a ring in which finitely generated projective R-modules are free R-modules, then R is called a PF ring. It is well known that the polynomial rings over an PID are the PF rings. In this paper we obtained some properties of the PF rings, and gave some applications on the PF rings.