第9卷 第3期
1989年8月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.9 No.3
Aug., 1989

同态模Hom(A, B)的同调维数*

王芳贵

（南京大学数学系）

摘要

本文从研究函子$\otimes$与Hom的联系入手，来考虑求Hom(A, B)的弱维数与投射维数．当K为域时，且条件（a）$[R:K]<\infty$，A是有限生成右R-模；（b）$[R:K]<\infty$，S是右凝聚代数；（c）$[S:K]<\infty$，R是右Noether代数，有一成立得到$\mathrm{l.wd}_{R\otimes S}\mathrm{Hom}(A, B)=\mathrm{r.id}_RA+\mathrm{l.wd}_SB$．

本文中的环与代数均指有单位元、可结合的环与代数．所有的模均指酉模．设K是可换环，K上的张量积记为$\sim\otimes\sim(=\sim\underset{K}{\otimes}\sim)$，$K$-同态模记为Hom$(\sim,\sim)$（$=\mathrm{Hom}_K(\sim,\sim)$）．设$R$，$S$是$K$-代数，任给一组模$(A_R, {}_SB)$，我们可对Hom$(A, B)$赋予一个$R\otimes S$-模结构[7]：对任何$f\in\mathrm{Hom}(A, B)$，$r\in R$，$s\in S$，$a\in A$，$[(r\otimes s)f](a)=sf(ar)$．对同态模Hom$(A, B)$，樊恽首先考虑了其内射维数[3]，徐岩松继而给出了一个更加精确的结果[4]．但对Hom(A, B)的弱维数与投射维数的研究尚未开始——事实上，它们的计算与内射维数的计算相比，要困难得多．本文从研究函子$\otimes$与Hom的联系入手，来考虑求Hom(A, B)的弱维数与投射维数．当K为域，且条件(a)，(b)，(c)有一成立：

（a）$[R:K]<\infty$，A是有限生成右R-模；

（b）$[R:K]<\infty$，S是右凝聚(coherent)代数；

（c）$[S:K]<\infty$，R是右Noether代数；

我们得到
$$\mathrm{l.wd}_{R\otimes S}\mathrm{Hom}(A, B)=\mathrm{r.id}_RA+\mathrm{l.wd}_SB.$$

§1 预备知识

欲求Hom(A, B)作为$R\otimes S$-模的弱维数与投射维数，首先还须考虑其分别作为R-模与S-模的弱维数．下面的一些命题是容易验证的．

命题1.1 （i）设$A\in\mathfrak{M}_R$，$0\leqslant p\leqslant\mathrm{r.id}_RA$，则存在一个循环右$R$-模$C$，使得
$$\mathrm{Ext}_R^p(C, A)\neq 0. \tag{1.1}$$

（ii）设$B\in{}_S\mathfrak{M}$，$0\leqslant q\leqslant\mathrm{l.wd}_SB$，则存在一个有限表现(finitely presented)的右S-模D，

* 1987年6月16日收到．国家自然科学基金资助项目．

使得

$$\mathrm{Tor}_q^S(D, B) \neq 0 \tag{1.2}$$

命题1.2 (i) 设R, K是任何环，对一组模$({}_KA_R, {}_KB, X_R)$，其中X是有限表现右R-模，B是内射左K-模，则有自然同构

$$X \underset{R}{\otimes} \mathrm{Hom}(A, B) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_R(X, A), B). \tag{1.3}$$

(ii) 在(i)中，若R是右凝聚的，则对任何$n \geqslant 0$，有自然同构

$$\mathrm{Tor}_n^R(X, \mathrm{Hom}(A, B)) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}_R^n(X, A), B). \tag{1.4}$$

(iii) 在(ii)中，若A是内射右R-模，则$\mathrm{Hom}(A, B)$是平坦左R-模.

(iv) 在(ii)中，若R是右Noether环，K是可换局部环，则有

$$\mathrm{l.wd}_R \mathrm{Hom}(A, B) = \mathrm{r.id}_R A \tag{1.5}$$

命题1.3 设K, S是任何环，$(A_K, {}_SB_K, X_S)$是一组模.

(i) 若下列两条件有一成立：

(a) A是有限生成投射K-模；

(b) A是投射K-模，X是有限表现S-模；

则有自然同构

$$\mathrm{Hom}(A, X \underset{S}{\otimes} B) \cong X \underset{S}{\otimes} \mathrm{Hom}(A, B). \tag{1.6}$$

(ii) 若(a)成立，或在(b)的假设之下，S还是右凝聚环，则对任何$n \geqslant 0$，有自然同构

$$\mathrm{Tor}_n^S(X, \mathrm{Hom}(A, B)) \cong \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Tor}_n^S(X, B)). \tag{1.7}$$

此外，若A是自由模，则有

$$\mathrm{l.wd}_S \mathrm{Hom}(A, B) = \mathrm{l.wd}_S B. \tag{1.8}$$

(iii) 在(i)中，若B是平坦左S-模，则$\mathrm{Hom}(A, B)$是平坦的左S-模.

§ 2 Hom(A, B)的弱维数

以下恒设K是域.

命题2.1 设$[R:K] < \infty$, $(A_R, {}_SB)$是一组模，满足下列条件之一：

(a) A是有限生成内射模，B是平坦模；

(b) A是内射模，B是平坦模，S是右凝聚环，

则$\mathrm{Hom}(A, B)$是平坦的左$R \otimes S$-模.

证明 A是$\mathrm{Hom}(R, A)$的子模，从而也是它的直和项，故$\mathrm{Hom}(A, B)$是$\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(R, A), B)$的直和项，我们只要证明后者是平坦模就行了. 这一点从$R \otimes S$-同构

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(R, A), B) \cong R \otimes \mathrm{Hom}(A, B) \tag{2.1}$$

与命题1.3(iii)得出.

引理2.2 任给一组模$(A_R, {}_SB, C_R, D_S)$，且下面条件有一成立：

(a) $[R:K] < \infty$, A, C是有限生成的；

(b) R, S都是右凝聚代数，C、D分别是有限表现的右R-模与有限表现的右S-模，则对任何$n \geqslant 0$，有

$$\mathrm{Tor}_n^{R \otimes S}(C \otimes D, \mathrm{Hom}(A, B)) \cong \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}_R^p(C, A), \mathrm{Tor}_q^S(D, B)) \tag{2.2}$$

证明 由〔9,Lem. 1.6〕及〔2,定理2.3及(1.6)式，有自然同构

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_R(C, A), D\underset{S}{\otimes}B)\cong C\underset{R}{\otimes}\mathrm{Hom}(A, D\underset{S}{\otimes}B)\\ &\cong C\underset{R}{\otimes}(D\underset{S}{\otimes}\mathrm{Hom}(A, B))\cong(C\otimes D)\underset{R\otimes S}{\otimes}\mathrm{Hom}(A, B).\end{aligned}\tag{2.3}$$

由〔8,V,Th.3.1〕，对任何$n\geqslant 0$，有

$$H_n(\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}, A), \mathbf{D}\underset{S}{\otimes}B))\cong H_n((\mathbf{C}\otimes\mathbf{D})\underset{R\otimes S}{\otimes}\mathrm{Hom}(A, B)),$$

其中 $\mathbf{C}\to C\to 0$ 是C的R-投射分解，每一C_i是有限生成的；且 $\mathbf{D}\to D\to 0$ 是D的S-平坦分解，但(b)成立时，还可假设每一D_j是有限表现的，故(2.2)式为真.

定理2.3 任给一组模$(A_R, {}_SB)$，若下列条件有一成立：

(a) $[R:K]<\infty$，A是有限生成的；

(b) R是右Noether的，S是右凝聚的，

则有

$$\mathrm{l.wd}_{R\otimes S}\mathrm{Hom}(A, B)\geqslant \mathrm{r.id}_R A+\mathrm{l.wd}_S B.\tag{2.4}$$

证明 设 $0\leqslant p\leqslant \mathrm{r.id}_R A$，$0\leqslant q\leqslant \mathrm{l.wd}_S B$，则有一个有限生成的右$R$-模$C$及一个有限表现的右$S$-模$D$，使得

$$\mathrm{Ext}_R^p(C, A)\neq 0 \qquad 且 \qquad \mathrm{Tor}_q^S(D, B)\neq 0.$$

K为域，必有$\mathrm{Hom}(\mathrm{Ext}_R^p(C, A), \mathrm{Tor}_q^S(D, B))\neq 0$，由引理2.2，有 $\mathrm{Tor}_{p+q}^{R\otimes S}(C\otimes D, \mathrm{Hom}(A, B))\neq 0$.

定理2.4 设$[R:K]<\infty$. 任给一组模$(A_R, {}_SB)$，若下列条件有一成立：

(a) A是有限生成的； (b) S是右凝聚的，

则有

$$\mathrm{l.wd}_{R\otimes S}\mathrm{Hom}(A, B)=\mathrm{r.id}_R A+\mathrm{l.wd}_S B.$$

证明 由定理2.3，只要证明

$$\mathrm{l.wd}_{R\otimes S}\mathrm{Hom}(A, B)\leqslant \mathrm{r.id}_R A+\mathrm{l.wd}_S B\tag{$*$}$$

就行了. 设 $0\to A\to\mathbf{E}$，$\mathbf{F}\to B\to 0$分别为A的R-内射分解与B的S-平坦分解，每一E^p是有限生成的，我们得到一个第一象限的双复形$\{\mathrm{Hom}(E^p, F_q)\}$，其全复形记为$\mathrm{Hom}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$，于是对每一$n\geqslant 0$，$\mathrm{Hom}(\mathbf{E}, \mathbf{F})_n=\bigoplus\limits_{p+q=n}\mathrm{Hom}(E^p, F_q)$ 是平坦的$R\otimes S$-模，由于

$$H_{p,q}^2=H_q(\mathrm{Hom}(E^p, \mathbf{F}))=\mathrm{Hom}(E^p, H_q(\mathbf{F}))=\begin{cases}0 & q>0;\\ \mathrm{Hom}(E^p, B), & q=0.\end{cases}$$

故双复形的谱序列是崩溃的(collapses)，从而有

$$H_n(\mathrm{Hom}(\mathbf{E}, \mathbf{F}))=E_{n,0}^2=\begin{cases}0, & n>0;\\ \mathrm{Hom}(A, B), & n=0.\end{cases}$$

这样，$\mathrm{Hom}(A, B)$有一个$R\otimes S$-平坦分解

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{E}, \mathbf{F})\to\mathrm{Hom}(A, B)\to 0$$

故($*$)式成立.

推论2.5 在定理2.4的假设之下，$\mathrm{Hom}(A, B)$是平坦左$R\otimes S$-模当且仅当A是内射模，B是平坦模.

若$[S:K]<\infty$，则S是Artin代数，故每一平坦S-模是投射模．设B是平坦(投射)左S-模，考虑S-同态$\varphi:S\otimes B\to B$，使得$\varphi(s\otimes b)=sb$，$s\in S$，$b\in B$．φ一定是满同态，故$B\oplus B'\cong S\otimes B$，$B'\in{}_S\mathfrak{M}$，故有$R\otimes S$-同构

$$\mathrm{Hom}(A, B\oplus B')\cong \mathrm{Hom}(A, B)\oplus \mathrm{Hom}(A, B)'$$
$$\cong \mathrm{Hom}(A, S\otimes B)\cong \mathrm{Hom}(A, B)\otimes S,$$

其中A是任何右R-模．类似于$[R:K]<\infty$的方法，我们可得下面的一些结论：

命题2.6 设$[S:K]<\infty$，R是右凝聚的．任给一组模$(A_R, {}_SB)$，若A是内射模，B是平坦模，则$\mathrm{Hom}(A, B)$是平坦的左$R\otimes S$-模．若R是右Noether的，其逆亦真．

定理2.7 设$[S:K]<\infty$,R是右Noether的，则(2.5)式亦真．

注 去掉有限维的假设，(2.5)式可能不成立，甚至满足定理2.4的条件(b)时，(2.4)式的等号还可能不成立．

例 设$R=K[X]$，$S=K[Y]$，X, Y是未定元，则$R\otimes S=S[X]$是一个整环．R的内射包为$K(X)$，即R的商域．考虑同态模$\mathrm{Hom}(K(X), S)$．令$h:K(X)\to S$，对$f(X), g(X)\in R$，$g(X)\neq 0, h\left(\frac{f(X)}{g(X)}\right)=\frac{f(Y)}{g(Y)}$．则$h\neq 0, h\in \mathrm{Hom}(K(X), S)$．取$w=1\otimes Y-X\otimes 1\in R\otimes S$，则$w\neq 0$,有$(wh)\left(\frac{f(X)}{g(X)}\right)=Yh\left(\frac{f(X)}{g(X)}\right)-h\left(\frac{Xf(X)}{g(X)}\right)=0$. 从而$wh=0$. 故$\mathrm{Hom}(K(X), S)$不是非挠的(torsionfree)，从而不是平坦$R\otimes S$-模．

§3 Hom(A, B)的投射维数

引理3.1 设$[R:K]<\infty$，对一组模$(A_R, {}_SB)$，A是有限生成的，我们有

$$\mathrm{l.pd}_S\mathrm{Hom}(A, B)=\mathrm{l.pd}_SB. \tag{3.1}$$

命题3.2 设$[R:K]<\infty$，A是有限生成内射的右R-模，B是投射左S-模，则$\mathrm{Hom}(A, B)$是投射左$R\otimes S$-模．

定理3.3 设$[R:K]<\infty$，对一组模$(A_R, {}_SB)$，A是有限生成的，则有

$$\mathrm{l.pd}_{R\otimes S}\mathrm{Hom}(A, B)=\mathrm{r.id}_RA+\mathrm{l.pd}_SB. \tag{3.2}$$

证明 类似于定理2.4，可证得

$$\mathrm{l.pd}_{R\otimes S}\mathrm{Hom}(A, B)\leqslant \mathrm{r.id}_RA+\mathrm{l.wd}_SB.$$

为证反向的不等式，我们考虑一组模$(A_R, {}_SB, C_R, {}_SD)$，有自然同构

$$\mathrm{Hom}_{R\otimes S}(\mathrm{Hom}(A, B), \mathrm{Hom}(C, D))\cong \mathrm{Hom}_S(C\underset{R}{\otimes}\mathrm{Hom}(A, B), D)$$
$$\cong \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_R(C, A), D)\cong \mathrm{Hom}_R(C, A)\otimes \mathrm{Hom}_S(B, D).$$

设$\mathbf{C}\to C\to 0$, $0\to D\to \mathbf{D}$分别为C的R-投射分解与D的S-内射分解，每一C_i是有限生成的．由[5, Th.11.31]，对任何$n\geqslant 0$，有

$$H_{-n}(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}, A)\otimes \mathrm{Hom}_S(B, D))$$
$$\cong \bigoplus_{p+q=n} H_{-p}(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}, A))\otimes H_{-q}(\mathrm{Hom}_S(B, \mathbf{D})).$$

故有

$$\mathrm{Ext}^n_{R\otimes S}(\mathrm{Hom}(A,B),\mathrm{Hom}(C,D))\cong\bigoplus_{p+q=n}\mathrm{Ext}^p_R(C,A)\otimes\mathrm{Ext}^q_S(B,D).$$

命题1.1与(3.4)式蕴含了

$$\mathrm{l.pd}_{R\otimes S}\mathrm{Hom}(A,B)\geqslant \mathrm{r.id}_R A+\mathrm{l.pd}_S B.$$

推论3.4 在定理3.3的假设之 ，$\mathrm{Hom}(A,B)$是$R\otimes S$-投射模，当且仅当A是内射模，B是平坦模.

当$[R:K]<\infty$，S是左完全、右凝聚代数时，易证$R\otimes S$ 也是左完全、右凝聚的，这时平坦模是投射模，这时(2. 式与(3.2)式是一致的.若S只是一般的K-代数，A是任何右R-模.设A的一组K-基为$\Delta=\{x_i\}$，则作为左S-模，$\mathrm{Hom}(A,B)\cong B^{\Delta}$，这不一定是投射模，因此，希望有等式(3.2)是不可能的.但在某些假设之下，我们可给出一些估计式.

引理3.5 设S是左Noether环，则任何$\mathscr{C}_{\bar{n}}$生成模是$\mathscr{C}_{\bar{n}}$表现的.

证明 对n用归纳法.$n=-1$结论显然.今设$n\geqslant 0$，M是$\mathscr{C}_{\bar{n}}$生成的，$Z(\mathscr{C}_{n-1})$表示由所所有基数为$\mathscr{C}_{n-1}$的序数组成的良序集，则$\mathrm{Card}Z(\mathscr{C}_{n-1})=\mathscr{C}_n$[12]，这意味着$M$的生成系可标号为$\{x_\alpha|\alpha\in Z(\mathscr{C}_{n-1})\}$.对任何$\beta\in Z(\mathscr{C}_{n-1})$，令$M_\beta$是由一切$x_\alpha(\alpha<\beta)$生成的子模，则$M=\bigcup_\beta M_\beta$，每一$M_\beta$是$\mathscr{C}_{n-1}$生成的.设$F_\beta$是由$\{e_\alpha|\alpha<\beta\}$为基底的自由模，对每一$\beta$，有正合列$0\to N_\beta\to F_\beta\to M_\beta\to 0$.但$F=\bigcup_\beta F_\beta$是自由模，且$0\to\bigcup_\beta N_\beta\to F\to M\to 0$ 是正合列.由归纳假设，N_β是$\mathscr{C}_{n-1}$生成的.故$\bigcup_\beta N_\beta$是$\mathscr{C}_{\bar{n}}$生成的，于是M是$\mathscr{C}_{\bar{n}}$表现的.

由引理3.5及 11 ，可得

命题3.6 设S是左Noether环，B是$\mathscr{C}_{\bar{n}}$生成的平坦模，则

$$\mathrm{l.pd}_S B\leqslant n+1. \tag{3.5}$$

注 当$n=-1$时，(3.5)式说明了左Noether环上有限生成平坦模是投射模.对$S=\mathbf{Z}$，$B=\mathbf{Q}$，B是$\mathscr{C}_{\bar{0}}$生成的，且$\mathrm{l.pd}_S B=1$，故(3.5)式中的上界可以达到.由命题3.6得

定理3.7 设S是左Noether环，B是$\mathscr{C}_{\bar{n}}$生成的左S-模，则

$$\mathrm{l.pd}_S B\leqslant \mathrm{l.wd}_S B+n+1. \tag{3.6}$$

引理3.8 设$(A_R, {}_SB)$是一组模，$[A:K]\leqslant\mathscr{C}_0$，$B$是可数生成的.若假设$2^{\mathscr{C}_0}=\mathscr{C}_1$(连续统假设)，则$\mathrm{Hom}(A,B)$是$\mathscr{C}_{\bar{1}}$生成的.

证明 设$\Delta=\{x_i\}$是A的K-基，$\mathrm{Card}\Delta=[A:K]$.若$B=C$，易见作为$S$-模，$\mathrm{Hom}(A,S)=\prod_\Delta S$是$\mathscr{C}_{\bar{1}}$生成的.故当$B=S^{(w)}(\mathrm{Card}\,w\leqslant\mathscr{C}_0)$时，$\mathrm{Hom}(A,B)\cong\prod_\Delta S^{(w)}$也是$\mathscr{C}_{\bar{1}}$生成的$S$-模，从而是$\mathscr{C}_{\bar{1}}$生成的$R\otimes S$-模.

最后，B是可数生成的，有S-正合列$S^{(w)}\to B\to 0$，$\mathrm{Card}\,w\leqslant\mathscr{C}_0$.于是$\mathrm{Hom}(A,S^{(w)})\to\mathrm{Hom}(A,B)\to 0$是$R\otimes S$-正合列.故$\mathrm{Hom}(A,B)$是$\mathscr{C}_{\bar{1}}$生成的$R\otimes S$-模.

由引理3.8及定理3.7,可得

定理3.9 设$(A_R, {}_SB)$是一组可数生成的模，且下面条件有一成立：

(a) $[R:K]<\infty$，S是左Noether、右凝聚的；

(b) $[R:K]\leqslant\mathscr{C}_0$，$[S:K]<\infty$，$R$是双边Noether代数.

则有

$$\mathrm{l.pd}_{R\otimes S}\mathrm{Hom}(A, B) \leqslant \mathrm{r.id}_R A + \mathrm{l.wd}_S B + 2 \qquad (3.7)$$

作者对导师周伯埙教授、佟文廷副教授的指导表示衷心地感谢.

参 考 文 献

[1] 周伯埙，数学研究与评论，创刊号(1981)，17—34.

[2] 胡述安，数学研究与评论，Vol.3，No.1(1983)，21—27.

[3] 樊恽，数学杂志，Vol.3，No.4(1984)，255—265.

[4] 徐岩松，数学学报，30(1987)，139—144.

[5] Rotman，J.J.，An Introduction to Homological Algebra，Academic Press，1979.

[6] Goodeal，K.R.，Ring Theory: nonsingular rings and modules，Marcel-Dekker，Inc.，1976.

[7] Cartan，H. and Eilenberg，S.，Homological Algebra，Princeton，1956.

[8] Hilton，P.J. and Stammbach，U.，A Course in Homological Algebra，Springer-Verlag，1970.

[9] Ishikawa，T.，J.Math. Soc. Japan，17(1965)，291—296.

[10] Vamos，M.，J.London Math. Soc.，43(1968)，643—646.

[11] Osofaky，B.L.，Nagoy a Math.J.，32(1968)，315—322.

[12] Jensen，C.U.，Math. Scand.，20(1967)，56—60.

[13] Fields，K.L.，Pac. J.Math.，32(1970)，343—349.

The homological dimension of the homomorphic module Hom(A, B)

Wang Fanggui

Abstract

Let K be a field and R and S $\otimes K$-algebras, then Hom(A, B) is an $R\otimes S$ module for a right R-module A and a left S-module B. In this paper the homo logical dimension of Hom(A, B) is considered and it is shown under some assum ptions that

$$\mathrm{l.wd}_{R\otimes S}\mathrm{Hom}(A, B) = \mathrm{r.id}_R A + \mathrm{l.wd}_S B.$$