第9卷 第3期
1989年8月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol,9 No.3
Aug., 1989

导算子范数的一个估计

吉国兴　　　　冯文英

（陕西师范大学，西安）　　（河北师范大学，石家庄）

设H是可分Hilbert空间，$B(H)$是H上有界线性算子全体，$(\mathrm{I}, \|\!|\cdot|\!\|)$表示$B(H)$的一个范数理想[1]．对$A, B\in B(H)$，定义$B(H)$上的导算子$\delta_{AB}: X\to AX-XB$，且称$\delta_{AA}=\delta_A$为内导算子．L. A. Fialkow和R. Loebl[2]讨论了值域含于$B(H)$的一个范数理想的导算子，并提出了下面的问题：

问题1[2]　若δ_{AB}的值域含于$B(H)$的一个范数理想$(\mathrm{I}, \|\!|\cdot|\!\|)$中，视$\delta_{AB}: B(H)\to \mathrm{I}$，其范数$\|\!|\delta_{AB}|\!\|=$？

对内导算子，〔2〕证明了若δ_A的值域$\mathrm{Ran}(\delta_A)\subset \mathrm{I}$，则存在唯一常数$\lambda$使$A-\lambda\in \mathrm{I}$，且有

$$2\|A-\lambda\|\geqslant \|\!|\delta_A|\!\|\geqslant \|\delta_A|_{\mathrm{I}}\|\geqslant \mathrm{diam}(W(A)), \tag{1}$$

此处$\mathrm{diam}(W(A))$表示A的数值域直径．

本文首先给出一个反例说明（1）式不能成立，进而给出了$\|\!|\delta_{AB}|\!\|$的一个精确估计，从而得到了问题1的部分结果．

例1　设$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$为H的就范直交基，定义$A\in B(H)$使$Ae_n=\frac{1}{n}e_{n+1}\ (n=1,2,\cdots)$，$A\in C_2$且$\|A\|_2^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$．作算子$X\in B(H)$，$Xe_{2n-1}=e_{2n-1}$，$Xe_{2n}=-e_{2n}$，则

$$\|AX-XA\|_2^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|(AX-XA)e_n\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}=4\|A\|_2^2,$$

视$\delta_A: B(H)\to C_2$，$\|\delta_A\|_2\leqslant 2\|A\|_2$，故$\|\delta_A\|_2=2\|A\|_2>2\|A\|$．此时（1）式左边的不等式不成立．

若$\mathrm{Ran}(\delta_{AB})\subseteq \mathrm{I}$，则存在唯一常数$\lambda$使$A-\lambda\in \mathrm{I}$，$B-\lambda\in \mathrm{I}$[2]．$T\in B(H)$，$T$的极大数值域$W_0(T)=\{\lambda: 存在x_n\in H, \|x_n\|=1, (Tx_n, x_n)\to\lambda, \|Tx_n\|\to\|T\|\}$，记$W_N(T)=W_0\left(\frac{T}{\|T\|}\right)$．

定理1　设$\delta_{AB}: X\to AX-XB$为$B(H)$上的导算子，$\mathrm{Ran}(\delta_{AB})\subset \mathrm{I}$，$\lambda\in \mathbb{C}$，$A-\lambda\in \mathrm{I}$，$B-\lambda\in \mathrm{I}$，则对任意$\lambda_1\in W_N(A-\lambda)$，$\lambda_2\in W_N(B-\lambda)$有

$$\|\!|A-\lambda|\!\|+\|\!|B-\lambda|\!\|\geqslant \|\!|\delta_{AB}|\!\|\geqslant\sqrt{|\lambda_1\|A-\lambda\|-\lambda_2\|B-\lambda\||^2+(|\alpha|\cdot\|A-\lambda\|+|\beta|\cdot\|B-\lambda\|)^2}$$

此处$|\alpha|^2=1-|\lambda_1|^2$，$|\beta|^2=1-|\lambda_2|^2$．

证明　$\|\!|\delta_{AB}X|\!\|=\|\!|\delta_{A-\lambda, B-\lambda}X|\!\|\leqslant(\|\!|A-\lambda|\!\|+\|\!|B-\lambda|\!\|)\|X\|$，因而$\|\!|\delta_{AB}|\!\|\leqslant\|\!|A-\lambda|\!\|+\|\!|B-\lambda|\!\|$．

设$A_1=A-\lambda$，$B_1=B-\lambda$，A_1、B_1为紧算子，不妨设存在H中单位向量x、y使$(A_1x, x)=\lambda_1\|A_1\|$，$\|A_1x\|=\|A_1\|$，$(B_1y, y)=\lambda_2\|B_1\|$，$\|B_1y\|=\|B_1\|$，设

$$A_1x=\lambda_1\|A_1\|x+\alpha\|A_1\|u,\qquad (u,x)=0,\ \|u\|=1,$$
$$B_1y=\lambda_2\|B_1\|y+\beta\|B_1\|v,\qquad (v,y)=0,\ \|v\|=1,$$
先设$\alpha,\beta\neq 0$，作算子X使$X(\alpha y)=|\alpha|x$，$X(\beta v)=-|\beta|u$，$X\{y,v\}^{\perp}=0$，则$\|X\|=1$，
$$|||A_1X-XB_1|||\geq\|A_1X-XB_1\|\geq\|(A_1X-XB_1)y\|$$
$$=\sqrt{|\lambda_1\|A_1\|-\lambda_2\|B_1\||^2+(|\alpha|\cdot\|A_1\|+|\beta|\|B_1\|)^2}$$
故$|||\delta_{AB}|||\geq\sqrt{|\lambda_1\|A_1\|-\lambda_2\|B_1\||^2+(|\alpha|\|A_1\|+|\beta|\|B_1\|)^2}$.

若$\alpha=0,\beta\neq0$,令$X(y)=x$；$X(\beta v)=-|\beta|u$；若$\alpha\neq0$，$\beta=0$，令$X(\alpha y)=|\alpha|x$，$X\{y\}^{\perp}=0$；若$\alpha=0$，$\beta=0$，令$X(y)=x$，$X\{y\}^{\perp}=0$. 如此分别可得到相应的结果，定理1得证.

定理2 若Ran$(\delta_{AB})\subset(\mathrm{I},|||\cdot|||)$，$A-\lambda\in\mathrm{I}$，$B-\lambda\in\mathrm{I}$，$W_N(A-\lambda)\cap W_N(\lambda-B)\neq\emptyset$,则
$$|||A-\lambda|||+|||B-\lambda|||\geq|||\delta_{AB}|||\geq\|A-\lambda\|+\|B-\lambda\|,$$
特别若$\|A-\lambda\|=|||A-\lambda|||$，$\|B-\lambda\|=|||B-\lambda|||$，则
$$|||\delta_{AB}|||=\|A-\lambda\|+\|B-\lambda\|.$$

推论3 若$W_N(A-\lambda)\cap W_N(B-\lambda)\neq\emptyset$,
$$|||A-\lambda|||+|||B-\lambda|||\geq|||\delta_{AB}|||\geq\sqrt{(\|A-\lambda\|+\|B-\lambda\|)^2-4|\mu|^2\|A-\lambda\|\|B-\lambda\|}$$
此处$\mu\in W_N(A-\lambda)\cap W_N(B-\lambda)$. 特别对$\mu\in W_N(A-\lambda)$ 有
$$2|||A-\lambda|||\geq|||\delta_A|||\geq2\|A-\lambda\|\sqrt{1-|\mu|^2}.$$

定理2、推论3由定理1易得，证明略.

下面的命题中设I为Schatten-p类算子$C_p(1<p<+\infty)$，其范数为Schatten-p范数$\|\cdot\|_p$[1].

命题4 设Ran$(\delta_{AB})\subset C_p$，$A-\lambda\in C_p$，$B-\lambda\in C_p$，

〈i〉若$B-\lambda$为1秩算子，则$\|\delta_{AB}\|_p=\|A-\lambda\|_p+\|B-\lambda\|_p$当且仅当$A-\lambda$为1秩算子且$W_N(A-\lambda)\cap W_N(\lambda-B)\neq\emptyset$；

〈ii〉若$A-\lambda$为1秩算子，则$\|\delta_{AB}\|_p=\|A-\lambda\|_p+\|B-\lambda\|_p$当且仅当$B-\lambda$为1秩算子且$W_N(A-\lambda)\cap W_N(\lambda-B)\neq\emptyset$.

证明 令$A_1=A-\lambda$，$B_1=B-\lambda$.

〈i〉充分性由定理2易得，下证必要性. 设$\|\delta_{AB}\|_p=\|A_1\|_p+\|B_1\|_p$，不妨设存在$X\in B(H)$，$\|X\|=1$，
$$\|\delta_{AB}\|_p=\|\delta_{A_1B_1}X\|_p=\|A_1\|_p+\|B_1\|_p\quad,$$
但
$$\|A_1X-XB_1\|_p\leq\|A_1X\|_p+\|XB_1\|_p\leq\|A_1\|_p+\|B_1\|_p\ ,$$
从而$\|A_1X\|_p=\|A_1\|_p$，$\|XB_1\|_p=\|B_1\|_p$，$A_1X=-\mu XB_1$，其中$\mu=\dfrac{\|A_1X\|_p}{\|XB_1\|_p}=\dfrac{\|A_1X\|}{\|XB_1\|}=\dfrac{\|A_1\|_p}{\|B_1\|_p}$

设$B_1=a\otimes b$，$\|b\|=1$，即对$x\in H$，$B_1(x)=(x,b)a$，$XB_1=(Xa)\otimes b$，$\|XB_1\|_p=\|Xa\|$，$\|B_1\|_p=\|a\|$，故$\|Xa\|=\|a\|$，X在B_1的值域上等距. 存在$y\in H$，$\|y\|=1$，$\|XB_1y\|=\|B_1y\|=\|B_1\|$，$\|A_1Xy\|\leq\|A_1X\|\leq\|A_1\|\leq\|A_1\|_p$，但$\|A_1Xy\|=\mu\|B_1\|=\|A_1\|_p$，因此$\|A_1\|=\|A_1\|_p$ $(1<p<+\infty)$，A_1为1秩算子.

令$x=Xy$，$\|x\|=1$ 且 $\|A_1x\|=\|A_1\|$，设

$$A_1x=\alpha\|A_1\|x+\beta\|A_1\|z,\quad \|z\|=1,\quad (z,x)=0,$$

由$\frac{XB_1y}{\|B_1\|}=-\frac{A_1Xy}{\|A_1\|}$及$X^*XB_1y=y$知

$$\alpha=\left(\frac{A_1}{\|A_1\|}x,x\right)=\left(-\frac{XB_1y}{\|B_1\|},Xy\right)=\left(-\frac{X^*XB_1y}{\|B_1\|},y\right)=\left(\frac{-B_1}{\|B_1\|}y,y\right),$$

故$W_N(A_1)\cap W_N(-B_1)\neq\varnothing$，〈 i 〉得证.

〈ii〉若X满足$\|A_1X-XB_1\|_p=\|A_1\|_p+\|B_1\|_p$，则$\|B_1^*X^*-X^*A_1^*\|_p=\|B_1^*\|_p+\|A_1^*\|_p$，由〈 i 〉易证$B_1$为1秩算子且$W_N(A_1)\cap W_N(-B_1)\neq\varnothing$. 命题4证毕.

例2 令$I=C_2$，$B=-A$，A在H的一组标准直交基$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$上如下定义：$Ae_n=\frac{1}{n}e_{n+1}$，$A\in C_2$，$W_N(A)\cap W_N(-B)\neq\varnothing$，$\|A-B\|_2=2\|A\|_2$，$\|\delta_{AB}\|_2=2\|A\|_2>2\|A\|$.

例3 设e、f是H中互相直交的单位向量，定义$Ae=f$，$Af=e$，$A\{e,f\}^{\perp}=0$；$Bf=e$，$B\{f\}^{\perp}=0$. 则A、$B\in C_2$，$\|A\|=\|B\|=1$，$\|A\|_2=\sqrt{2}$，$\|B\|_2=1$，$0\in W_N(A)\cap W_N(B)$. A非一秩算子，由命题4知$\|\delta_{AB}\|_2<\|A\|_2+\|B\|_2$. 又设$X\in B(H)$，$Xe=-f$，$Xf=e$，$X\{e,f\}^{\perp}=0$，$\|AX-XB\|_2>\|AX-XB\|=\|A\|+\|B\|$，故$\|A\|+\|B\|<\|\delta_{AB}\|_2<\|A\|_2+\|B\|_2$.

例4 设$\{e_1、f_1\}$、$\{e_2、f_2\}$分别为H中互相直交的单位向量，令$A=e_1\otimes f_1$，$B=e_2\otimes f_2$，则知$0\in W_N(A)\cap W_N(-B)$ 且$\|\delta_{AB}\|_2=\|A\|+\|B\|$.

从以上三个例子看出定理2中给出的估计上、下限均可达到，也可都不达到，所以要明确地给出$\delta_{AB}:B(H)\to(I,|||\cdot|||)$范数的具体表示是困难的，而只能给出定理2中的精确估计.

参 考 文 献

[1] R. Schatten, Ergebnisse der Math., Springer-Verlag, (1960), pp. 54—55.

[2] L. A. Fialkow and Richard Loebl, Illinois J. Math., Vol. 28, No. 4, (1984), pp. 555—578.

An estimate for the norm of a derivation

Ji Guoxing　　Feng Wenying

Abstract

In this paper, a derivation δ_{AB} mapping into a ideal I of $B(H)$ is considered, when $A, B\in B(H)$ and I is a norm ideal. If $\mathrm{Ran}(\delta_{AB})\subset I$, let $\delta_{AB}:B(H)\to I$ denote the induced operator and let λ be the scalar such that $A-\lambda\in I$, $B-\lambda\in I$, we estimate the norm of δ_{AB} as follows

$$|||A-\lambda|||+|||B-\lambda|||\geqslant|||\delta_{AB}|||\geqslant\|A-\lambda\|+\|B-\lambda\|$$

when $W_N(A-\lambda)\cap W_N(\lambda-B)\neq\varnothing$, where $W_N(A-\lambda)$ denotes the normalized maximal numerical range and $|||A-\lambda|||$ denotes the norm of $A-\lambda\in I$. In particular when $I=C_p(1<p<+\infty)$ and $\|B-\lambda\|=\|B-\lambda\|_p$, we prove that $\|\delta_{AB}\|_p=\|A-\lambda\|_p+\|B-\lambda\|_p$ if and only if $\|A-\lambda\|=\|A-\lambda\|_p$ and $W_N(A-\lambda)\cap W_N(\lambda-B)\neq\varnothing$. At last, some examples show that the estimate as above is exact.