第9卷 第3期
1989年8月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITICA

Vo.9 No.3
Aug., 1989

无爪图的Hamilton-连通性*

吴正声

(南京师范大学数学系)

摘 要

本文证明了下列结论：设G是p阶3-连通无爪简单图．若对于G中任意3个顶点的独立集$\{x_1, x_2, x_3\}$，有

$$d(x_1)+d(x_2)+d(x_3)\geqslant P+1$$

则G是Hamilton-连通图．

1961年，O．Ore证明了下列定理：

定理A [1] 设G是p阶简单图，$p\geqslant 3$．若对于任意不相邻的顶点x_1，x_2，有

$$d(x_1)+d(x_2)\geqslant p$$

则G是Hamilton图．

众所周知，无爪图就是不存在顶点导出子图同构于$K_{1,3}$的图．1985年，M．M．Matthews 等在[2]中讨论了无爪图中的最长路和最长圈，证明了：设G是p阶2-连通的无爪简单图，若其最小次$\delta\geqslant\frac{1}{2}(p-2)$，则G是Hamilton图．1986年，田丰等推广了这个结果，证明了下列定理：

定理B [3] 设G是p阶2-连通的无爪简单图．若对于G中任意3个顶点的独立集$\{x_1, x_2, x_3\}$，有

$$d(x_1)+d(x_2)+d(x_3)\geqslant p-2$$

则G是Hamilton图．

1959年，P．Erdös 等证明了下列定理：

定理C [4] 设G是p阶简单图，$p\geqslant 3$．若对G中任意不相邻的顶点x_1、x_2，有

$$d(x_1)+d(x_2)\geqslant p+1.$$

则G是Hamitlon-连通图．

本文将讨论无爪图的Hamilton 连通性，类似于定理B，证明了列定理：

定理 设G是p阶3-连通的无爪简单图．若对于G中任意3个顶点的独立集$\{x_1, x_2, x_3\}$，有

$$d(x_1)+d(x_2)+d(x_3)\geqslant p+1.$$

* 1987年8月1日收到．

则G是Hamilton-连通图．

注 众所周知，Hamilton-连通图总是3-连通的．于是，定理中假定G是3-连通图，这是平凡的．而在定理C中,条件“对G中任意不相邻的顶点x_1、x_2，有$d(x_1)+d(x_2)\geqslant p+1$”已蕴含图G是3-连通的．

本文采用下列记号：设G是图，用V(G)和E(G)分别表示G的顶点集和边集．设$U\subseteq V(G)$，用G(U)表示G中U的导出子图．设$x\in V(G)$，用$N(x)$表示x的邻集，且总设$N_U(x)=N(x)\cap U$，$N_H(x)=N(x)\cap V(H)$(这里H是G的子图)．总认为G中的(u,v)-路P是有向的．用$\overline{P}$表示P的逆向路，它是(v,u)-路．设$w\in V(P)$，用w^{-i}和w^{+i}分别表示P上w前面第i个顶点和w后面第i个顶点(这里i是自然数)．设$S=\{s_1,s_2,\cdots,s_h\}\subseteq V(P)\setminus\{v\}$．令$S^+=\{s_1^{+1},s_2^{+1},\cdots,s_h^{+1}\}$．设$w_1$、$w_2\in V(P)$，用$P[w_1,w_2]$表示自$w_1$起沿P到$w_2$的路(此时总假定$w_2$在P上不前于$w_1$)．用$P^*[w_1,w_2]$表示$P(w_1,w_2)$中的顶点所组成的集合．

引理 设G是无爪简单图．$\{u,v\}\subseteq V(G)$，P是G中最长的(u,v)-路，$R=V(G)\setminus V(P)\neq\varnothing$．且设$a_1\in V(P)\setminus\{u\}$，$a_2\in P^*[a_1^{+1},v]$，且有G[R]中的$(x_1,x_2)$-路Q，使得$a_1x_1$、$a_2x_2\in E(G)$．再设$f_1\in V(P)$，使得$P^*[f_1^{+1},a_1]\subseteq N(a_1^{+1})$．当$a_2=v$时，设$f_2=v^{-1}$，当$a_2\neq v$时，设$f_2\in V(P)$，使得$P^*[f_2^{+1},a_2]\subseteq N(a_2^{+1})$．便有下列结论：

(1) 设$a\in V(P)\setminus\{u,v\}$，$N_R(a)\neq\varnothing$，则$a^{-1}a^{+1}\in E(G)$．从而，$a_1^{-1}a_1^{+1}\in E(G)$．并且，当$a_2\neq v$时，$a_2^{-1}a_2^{+1}\in E(G)$．

(2) $f_2\in P^*[a_1^{+1},a_2^{-1}]$.

(3) $f_1f_2\notin E(G)$，对任一个$x\in V(Q)$，$f_ix\notin E(G)$ $(i=1,2,)$．

(4) 对任一个$x\in V(Q)$，$N_R(f_1)\cap N_R(x)=N_R(f_2)\cap N_R(x)=N_R(f_1)\cap N_R(f_2)=\varnothing$．

(5) $N(f_1)\cap P^*[f_2,a_2]=N(f_2)\cap P^*[f_1,a_1]=\varnothing$．

(6) 若$f_1a_1^{+1}\notin E(G)$，则$f_1a_1\notin E(G)$；若$a_2\neq v$，$f_2a_2^{+}\notin E(G)$，则$f_2a_2\notin E(G)$．

(7) 令$S_0=P^*[u,a_1]$，$S_1=P^*[a_1^{+1},a_2]$，$S_2=P^*[a_2^{+1},v]$．且令$N_i(y)=N_{S_i}(y)$ $(i=0,1,2)$．$N_0^+(f_1)\cap N_0(f_2)=N_1^+(f_1)\cap N_1(f_1)=(N_2(f_1)\setminus\{v\})^+\cap N_2(f_2)=(N_2(f_1)\setminus\{v\})^+\cap N_2(x)=N_2(f_2)\cap N_2(x)=\varnothing$．

证明 (1) 反证．假设$a^{-1}a^{+1}\notin E(G)$．设$z\in N_R(a)$，则za^{-1}、$za^{+1}\notin E(G)$(否则，有比P更长的(u,v)-路，矛盾)．于是，$G[\{a;a^{-1},a^{+1},z\}]\cong K_{1,3}$，矛盾．

(2) 当$a_2=v$时，结论显然成立．

当$a_2\neq v$时，有$a_1^{+1}\notin N(a_2^{+1})$，否则，有比P更长的$(u,v)$-路．

$$P[u,a_1]Q\overline{P}[a_2,a_1^{+1}]P[a_2^{+1},v]$$

矛盾．于是，$f_2\in P^*[a_1^{+1},a_2^{-1}]$.

(3) 反证．若$f_1x\in E(G)$，则有比P更长的(u,v)-路

$$P[u,f_1]\overline{Q}[x,x_1]\overline{P}[a_1,f_1^{+1}]P[a_1^{+1},v]$$

矛盾．若$f_2x\in E(G)$，则有比P更长的(u,v)-路

$$P_1=\begin{cases}P[u,f_2]Q[x,x_2]\overline{P}[a_2,f_2^{+1}]P[a_2^{+1},v] & (a_2\neq v)\\ P[u,v^{-1}]Q[x,x_2]v & (a_2=v)\end{cases}$$

矛盾．若$f_1f_2\in E(G)$，则有比P更长的(u,v)-路．

$$P_2=\begin{cases}P[u,f_1]\overline{P}[f_2,a_1^{+1}]P[f_1^{+1},a_1]Q\overline{P}[a_2,f_2^{+1}]P[a_2^{+1},v] & (a_2\neq v)\\ P[u,f_1]\overline{P}[v^{-1},a_1^{+1}]P[f_1^{+1},a_1]Qv & (a_2=v)\end{cases}$$

矛盾．

（4）反证．若 $y_1\in N_R(f_1)\cap N_R(x)$，则由（3）$y_1\notin V(Q)$．于是，有比P更长的$(u,v)$-路

$$P[u,f_1]y_1\overline{Q}[x,x_1]\overline{P}[a_1,f_1^{+1}]P[a_1^{+1},v]$$，

矛盾．若 $y_2\in N_R(f_2)\cap N_R(x)$，则由（3）$y_2\notin V(Q)$．于是，有比P更长的$(u,v)$-路

$$P_1=\begin{cases}P[u,f_2]y_2Q[x,x_2]\overline{P}[a_2,f_2^{+1}]P[a_2^{+1},v] & (a\neq v)\\ P[u,v^{-1}]y_2Q[x,x_2]v & (a=v)\end{cases}$$

矛盾．若 $y_3\in N_R(f_1)\cap N_R(f_2)$，则由（3）$y_3\notin V(Q)$．于是,有比P更长的$(u,v)$-路

$$P_2=\begin{cases}P[u,f_1]y_3\overline{P}[f_2,a_1^{+1}]P[f_1^{+1},a_1]Q\overline{P}[a_2,f_2^{+1}]P[a_2^{+1},v] & (a_2\neq v)\\ P[u,f_1]y_3\overline{P}[v^{-1},a^{+1}]P[f_1^{+1},a_1]Qv & (a_2=v)\end{cases}$$

矛盾．

（5）反证．若 $w_1\in N(f_1)\cap P^*[f_2,a_2^{-1}]$，则有比P更长的$(u,v)$路

$$P_1=\begin{cases}P[u,f_1]\overline{P}[w_1,a_1^{+1}]P[f_1^{+1},a_1]Q\overline{P}[a_2,w_1^{+1}]P[a_2^{+1},v] & (a_2\neq v)\\ P[u,f_1]\overline{P}[v^{-1},a_1^{+1}]P[f_1^{+1},a_1]Qv & (a_2=v)\end{cases}$$

矛盾．若 $w_2\in N(f_2)\cap P^*[f_1,a_1^{-1}]$，则有比P更长的$(u,v)$-路

$$P_2=\begin{cases}P[u,w_2]\overline{P}[f_2,a_1^{+1}]P[w_2^{+1},a_1]Q\overline{P}[a_2,f_2^{+1}]P[a_2^{+1},v] & (a_2\neq v)\\ P[u,w_2]\overline{P}[v^{-1},a_1^{+1}]P[w_2^{+1},a_1]Qv & (a_2=v)\end{cases}$$

矛盾．便有 $N(f_1)\cap P^*[f_2,a_2^{-1}]=N(f_2)\cap P^*[f_1,a_1^{-1}]=\varnothing$．特别，$f_1a_2^{-1}$、$f_2a_1^{-1}\notin E(G)$．

假设对于 $\{i,j\}=\{1,2\}$．有 $f_ia_j\in E(G)$．由（3），$f_ix_j\notin E(G)$．又注意到，x_j、$f_i\notin N(a_j^{-1})$．于是，$G[\{a_j;a_j^{-1},x_j,f_i\}]\cong K_{1,3}$，矛盾．

（6）反证．假设对于$i\in\{1,2\}$，有$f_ia_i\in E(G)$．由（3），$f_ix_i\notin E(G)$．显然，$x_ia_i^{+1}\notin E(G)$．由假定条件$f_ia_i^{+1}\notin E(G)$，于是，$G[\{a_i;f_i,a_i^{+1},x_i\}]\cong K_{1,3}$，矛盾．

（7）反证．若 $w_1\in N_0^+(f_1)\cap N_0(f_2)$，则$w_1^{-1}\in N_0(f_1)$，且由（5），$w_1\in P^*[u,f_1^{-1}]$．于是有比P更长的$(u,v)$-路

$$P_1=\begin{cases}P[u,w_1^{-1}]\overline{P}[f_1,w_1]\overline{P}[f_2,a_1^{+1}]P[f_1^{+1},a_1]Q\overline{P}[a_2\,f_2^{+1}]P[a_2^{+1},v] & (a_2\neq v)\\ P[u,w_1^{-1}]\overline{P}[f_1,w_1]\overline{P}[v^{-1},a_1^{+1}]P[f_1^{+1},a_1]Qv & (a_2=v)\end{cases}$$

矛盾．若 $w_2\in N_1^+(f_1)\cap N_1(f_1)$，则$w_2^{-1}\in N_1(f_2)$，且由（5），$w_2\in P^*[a_1^{+1},f_2^{-1}]$．于是，有比P更长的$(u,v)$-路

$$P_2=\begin{cases}P[u,f_1]P[w_2,f_2]\overline{P}[w_2^{-1},a_1^{+1}]P[f_1^{+1},a_1]Q\overline{P}[a_2,f_2^{+1}]P[a_2^{+1},v] & (a_2\neq v)\\ P[u,f_1]P[w_2,v^{-1}]\overline{P}[w_2^{-1},a_1^{+1}]P[f_1^{+1},a_1]Qv & (a_2=v)\end{cases}$$

矛盾．若 $w_3\in(N_2(f_1)\setminus\{v\})^+\cap N_2(f_2)$，有比P更长的$(u,v)$-路．

$$P[u,f_1]\overline{P}[w_3^{-1},a_2^{+1}]P[f_2^{+1},a_2]\overline{Q}\,\overline{P}[a_1,f_1^{+1}]P[a_1^{+1},f_2]P[w_3,v]$$

矛盾．若$w_4\in(N_2(f_1)\setminus\{v\})^+\cap N_2(x)$．则有比P更长的$(u,v)$-路

$$P[u,f_1]\overline{P}[w_3^{-1},a_1^{+1}]P[f_1^{+1},a_1]Q[x_1,x]P[w_3,v]$$

矛盾．若 $w_5\in N_2(f_2)\cap N_2(x)$．则 $w_5\neq a_2^{+1}$，且 $N_R(w_5)\neq\varnothing$．当$w_5\neq v$时，有比P更长的(u,v)-路

$$P[u,f_2]w_5Q[x,x_2]\overline{P}[a_2,f_2^{+1}]P[a_2^{+1},w_5^{-1}]P[w_5^{+1},v]$$

矛盾．当 $w_5=v$ 时，由 $G[\{v;x,f_2,v^{-1}\}]\not\cong k_{1,3}$．易见，$f_2v^{-1}\in E(G)$，便有比 P 更长的 (u,v)-路

$$P[u,f_2]\overline{P}[v^{-1},a_2^{+1}]P[f_2^{+1},a_2]\overline{Q}[x_2,x]v$$

矛盾．　引理证毕．

定理的证明　用反证法．设G不是Hamilton-连通图，则存在 $(u,v)\in E(G)$，使得最长的 (u,v)-路 P，有 $R=V(G)\setminus V(P)\neq\varnothing$．取 $z\in R$．因G是3-连通图，故在路 P 上存在 3 个顶点，它们依 P 的顺序排列为 a_0、a_1、a_2，使得在 $G[R\cup\{a_i\}]$ 中有 (a_i,z)-路 $Q_i(i=0,1,2)$，且 Q_0、Q_1、Q_2 的内部顶点互不相交．不妨设

$$N_P(z)\subseteq P^*[a_2^+,v]\cup\{a_0,a_1,a_2\}.$$

如若不然，可用 $N_P(z)$ 中的顶点代替 a_0、a_1、a_2，使它们满足上式．设路 $Q_1=a_1x_1\cdots y_1z$，路 $Q_2=a_2x_2\cdots z$．再设 (x_1,x_2)－路 $Q=Q_1[x_1,y_1]\overline{Q}[z,x_2]$．显然，$x_1a_1$、$x_2a_2\in E(G)$，且 $z\in V(Q)$，$a_1\neq u$，$a_2\in P^*[a_1^{+1},v]$．注意到，G是无爪图．于是，下面将引用引理中的结论．

令 $S_0=P^*[u,a_1]$，$S_1=P^*[a_1^{+1},a_2]$，$S_2=P^*[a_2^{+1},v]$．再令 $N_i(w)=N_{S_i}(w)$．设 $b_1\in V[P]$，使得 $P^*[b_1^{+1},a_1]\subseteq N(a_1^{+1})$，且 $b_1a_1^{+1}\notin E(G)$．又，当 $a_2=v$ 时，设 $b_2=v^{-1}$；当 $a_2\neq v$ 时，设 $b_2\in V(P)$，使得 $P^*[b_2^{+1},a_2]\subseteq N(a_2^{+1})$，且 $b_2a_2^{+1}\in E(G)$．由引理(2)，$b_i\in P^*[a_{i-1}^{+1},a_{i-1}^{-1}]\subseteq S_i$ $(i=1,2)$．

于是，由引理(5)、(7)，在 S_0 中下列集合互不相交：

$$N_0(b_1)\cap S_0,\quad N_0(b_2),\qquad \{b_1^{+1}\}.$$

再由引理(6)，$b_1a_1\notin E(G)$．由此，$|N_0^+(b_1)\cap S_0|=|N_0(b_1)|$．于是，便有

$$|S_0|\geqslant|N_0(b_1)|+|N_0(b_2)|+1$$

由引理(5)、(7)及 $b_1a_1^{+1}\notin E(G)$，在 S_1 中下列集合互不相交：

$$N_1^+(b_2)\cap S_1,\quad N_1(b_1),\qquad \{a_1^{+1},b_2^{+1}\}.$$

显然，$|N_1^+(b_1)\cap S_1|\geqslant|N_1(b_2)|-1$．于是，便有

$$|S_1|\geqslant|N_1(b_1)|+|N_1(b_2)|+1.$$

当 $a_2\neq v$ 时，显然有 $a_2^{+1}z\notin E(G)$，再由引理(7)及 $b_2a_2^{+1}\notin E(G)$，在 S_2 中下列集合互不相交：

$$(N_2(b_1)\setminus\{v\})^+,\quad N_2(b_2),\quad N_2(z),\qquad \{a_2^{+1}\}.$$

注意到，$N_P(z)\subseteq N_2(z)\cup\{a_0,a_1,a_2\}$．由此，$|N_2(z)|\geqslant|N_P(z)|-3$．显然，$|(N_2(b_1)\setminus\{v\})^+|\geqslant|N_2(b_1)|-1$．于是，便有

$$|S_2|\geqslant|N_2(b_1)|+|N_2(b_2)|+|N_P(z)|-3$$

当 $a_2=v$ 时，$|S_2|=|N_2(b_1)|=|N_2(b_2)|=|N_2(z)|=0$，$0\geqslant|N_P(z)|-3$．由此，上式也成立．
由引理(3)、(4)，在 R 中下列集合互不相交：

$$N_R(b_1),\quad N_R(b_2),\quad N_R(z),\qquad \{z\}.$$

于是，有

$$|R|\geqslant|N_R(b_1)|+|N_R(b_2)|+|N_R(z)|+1$$

又由引理(3)，$\{b_1,b_2,z\}$ 是G的独立集．于是，有

$$p=|V(G)|=|V(P)|+|R|=|S_0|+|S_1|+|S_2|+|R|$$
$$(|N_0(b_1)|+|N_0(b_2)|+1)+(|N_1(b_1)|+|N_1(b_2)|+1)$$

$$+(|N_2(b_1)|+|N_2(b_2)|+|N_P(z)|-3)+(|N_R(b_1)|+|N_R(b_2)|+|N_R(z)|+1)$$
$$=d(b_1)+d(b_2)+d(z)\geqslant p+1$$

矛盾．便得定理结论．

参 考 文 献

[1] O. Ore, Ann. Mat. Pura Appl, 55(1961), 315—321.

[2] M. M. Matthews and D. P. Sumner, J. Graph Theory, 9(1985), 269—277.

[3] 田丰、吴正声、刘小平，长沙铁道学院学报，4(1986)No.4, 105—106.

[4] P. Erdös and J. Gallal, Acta Math Ac. Sc. Hung., 10(1959), 337—356.

Hamilton-Connectivity of $k_{1,3}$-Free Graphs

Wu Zhengsheng

Abstract

In this paper, we proved the following result: Let G be a simple 3-connected $k_{1,3}$-free graph of order p. If for any independent sets $\{x_1, x_2, x_3\}$ of three vertices in G, we have

$$d(x_1)+d(x_2)+d(x_3)\geqslant p+1.$$

Then G is Hamilton connected.

(接452页)

参 考 文 献

[1] Adám. A, Research Problem 2 10, J. Comb. Theory, 2(1967), 393.

[2] 孙良，关于循环图的综述，北京工业学院科技资料，87—54.

[3] Ryser. H. J, 组合数学，李乔译，科学出版社，1983.

[4] 王军，一类具有唯一定长路的有向图的自同构群，大连理工大学学报，2(1989).