第9卷 第3期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol.9 No.3
1989年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL REBEARCH AND EXPOSITION　　Aug., 1989

关于幂数问题的一个Golomb猜想*

袁平之

（四川大学数学系，成都）

摘　　要

本文用Pell方程的知识，否定了Golomb猜想2°，并且证明：任意一个数m（$m\neq 0$）均可真表示为两个幂数的差，且表法无限．

S. W. Golomb[1]给出了幂数的概念．正整数n若满足$p|n$，则$p^2|n$，此处p为素数，则n叫做一个幂数．在〔1〕中S. W. Golomb讨论了数用两个幂数的差表示的问题，并且证明了1，4均可真表示为两个幂数之差（所谓真表示，即两个幂数互素的幂数之差表示），并且表法无限．在数的两幂数差表示方面，A. Makowski[2]证明了$p\equiv 1(\mathrm{mod}\,8)$，$p$为素数，则$p$可真表示为两个幂数之差，并且表法无限；W. A. Sentance[3]和肖戎[4]分别给出了无穷多对形如$4k+1$，$4k+3$和$4k-1$，$4k-3$的连续奇幂数，从而证明了2可真表示为两个幂数之差，并且表法无限．

在〔1〕中S. W. Golomb还提出了如下两个猜想：

1°．6不能表示为两个幂数的差．

2°．有无限多个形如$2(2b+1)$ $b>0$的数不能表为两个幂数之差．

在〔4〕中肖戎给出了$6=5^4\cdot 7^3-463^2$，从而否定了Golomb猜想1°．

本文用Pell方程的知识，否定了Golomb猜想2°，并且证明了：任意一个数m（$m\neq 0$）均可真表示为两个幂数的差，并且表法无限．

首先，我们有：

引理1　设m为给定奇数，k_0为奇数满足（k_0，m）= 1，$D=(m+k_0)^2-m^2>0$非平方数．设$x^2-Dy^2=1$有解$x+y\sqrt{D}$满足（D，y）= 1．则m可真表示为两个幂数之差，并且表法无限．

证明　设Pell方程$x^2-Dy^2=1$的基本解为$x_0+y_0\sqrt{D}$由于

$$x_k+y_k\sqrt{D}=(x_0+y_0\sqrt{D})^k=\sum_{i=0}^{[\frac{k}{2}]}\binom{k}{2i}x_0^{k-2i}y_0^{2i}D^i+\sum_{i=0}^{[\frac{k-1}{2}]}\binom{k}{2i+1}x_0^{k-2i}y_0^{2i+1}D^i\sqrt{D}$$

并且$x^2-Dy^2=1$有解$x+y\sqrt{D}$满足（y, D）= 1，故$y_0\,|\,y_k$，$(y_0, D)=1$，又$x^2-Dy^2=m^2$有解

* 1987年10月27日收到．国家自然科学基金资助的课题．

$m+k_0+\sqrt{D}$，现在我们证明在结合类$X_k+Y_k\sqrt{D}=(m+k_0+\sqrt{D})(x_0+y_0\sqrt{D})^k$中有无限多个$k$满足$2|X_k$，$(X_k, m)=1$且$D|Y_k$.

（i）当$k\equiv 0(\bmod 2)$时，$y_k\equiv 0(\bmod 2)$，故$X_k+Y_k\sqrt{D}\equiv(m+k_0+\sqrt{D})(1+0\cdot\sqrt{D})\equiv\sqrt{D}(\bmod 2)$，故$2|X_k$.

（ii）由$x_0^2-Dy_0^2=1$两边取模m得知$(x_0+k_0y_0)(x_0-k_0y_0)\equiv 1(\bmod m)$. 由于

$$X_k\equiv k_0\sum_{i=0}^{[\frac{k}{2}]}\binom{k}{2i}x_0^{k-2i}y_0^{2i}D^i+\sum_{i=0}^{[\frac{k-1}{2}]}\binom{k}{2i+1}x_0^{k-2i-1}y_0^{2i+1}D^{i+1}k_0(\bmod m)$$

$$\equiv k_0\sum_{i=0}^{[\frac{k}{2}]}\binom{k}{2i}x_0^{k-2i}(y_0k_0)^{2i}+\sum_{i=0}^{[\frac{k-1}{2}]}\binom{k}{2i+1}x_0^{k-2i-1}(y_0k_0)^{2i+1}k_0(\bmod m)$$

$$\equiv k_0(x_0+k_0y_0)^k(\bmod m)$$

故$(X_k, m)=(k_0, m)=1$.

（iii）由于
$$Y_k=\sum_{i=0}^{[\frac{k}{2}]}\binom{k}{2i}x_0^{k-2i}y_0^{2i}D^i+(m+k_0)\sum_{i=0}^{[\frac{k-1}{2}]}\binom{k}{2i+1}x_0^{k-2i-1}y_0^{2i+1}D^i$$
$$\equiv x_0^k+kx_0^{k-1}y_0(m+k_0)(\bmod D)$$
$$\equiv x_0^{k-1}(x_0+ky_0(m+k_0))(\bmod D)$$

由于$(y_0, D)=1$，$(m+k_0, D)=(m+k_0, mk_0)=1$，故有正整数$k_1$，当$k\equiv k_1(\bmod D)$时，$D|Y_k$.

由于$(D, 2)=1$，故有正整数k_2使得当$k\equiv k_2(\bmod 2D)$时，满足$2|X_k$，$(m, X_k)=1$，$D|Y_k$，此时令：$Y_k=DY_k'$，则有$X_k^2-DY_k^2=X_k^2-D^3Y_k'^2=m^2$，$(X_k+m)(X_k-m)=D^3Y_k'^2$. 由于$(X_k, m)=1$，$2\nmid X_k+m$，故$(X_k+m, X_k-m)=1$，从而有正整数$u_k$，$v_k$，$r_k$，$s_k$使$X_k+m=u_k^3v_k^2$，$X_k-m=r_k^3s_k^2$，故

$$2m=u_k^3v_k^2-r_k^3s_k^2$$

由于$(X_k, m)=1$，故$(u_kv_kr_ks_k, 2m)=1$，从而给出了$2m$的两幂数差的真表示，并且表法无限.

定理1 任意形如$2(2b+1)=2m$，$b\geqslant 0$的数均可真表示为两个幂数之差，并且表法无限.

证明 由引理1得知只需找一个奇数k_0满足$(k_0, m)=1$，$D=(m+k_0)^2-m^2>0$非平方数，且$x^2-Dy^2=1$有解$x+y\sqrt{D}$满足$(D, y)=1$即可.

设$(m, 3)=1$，令$k_0=\frac{(m-1)^2}{2}+1$，则$x^2-Dy^2=1$有解$\left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2+1+\frac{m^2+1}{2}\sqrt{D}$，易证$(k_0, m)=1$，$D=\frac{m^4+2m^2+9}{4}$非平方数，$\left(\frac{m^2+1}{2}, D\right)=1$.

设$(m, 3)\neq 1$，令$k_0=\frac{(m-1)^2}{2}-1$，则$D=\frac{m^4-6m^2+1}{4}>0$非平方数，$x^2-Dy^2=1$有解$\left(\frac{m-3}{2}\right)^2-1+\frac{m^2-3}{2}\sqrt{D}$满足$(k_0, m)=1$，$\left(\frac{m^2-3}{2}, D\right)=1$.

由引理1知定理1得证.

从定理1我们知道Golomb猜想2°不成立.

引理2 设m为给定奇数，k_0为偶数满足$(k_0,\ m)=1$，$D=(k_0+m)^2-m^2>0$非平方数. 设$x^2-Dy^2=1$有解$x+y\sqrt{D}$满足$(D,\ y)=1$，则m可真表示为两个幂数的差，并且表法无限.

证明 由于$x^2-Dy^2=1$有解$x+y\sqrt{D}$满足$(D,\ y)=1$，故$x^2-Dy^2=1$的基本解$x_0+y_0\sqrt{D}$满足$(D,\ y_0)=1$，由于

$$x_k+y_k\sqrt{D}=(x_0+y_0\sqrt{D})^k$$

$$=\sum_{i=0}^{[\frac{k}{2}]}\binom{k}{2i}x_0^{k-2i}y_0^{2i}D^i+\sum_{i=0}^{[\frac{k-1}{2}]}\binom{k}{2i+1}x_0^{k-2i-1}y_0^{2i+1}D^i\sqrt{D}$$

又$x^2-Dy^2=m^2$有解$m+k_0+\sqrt{D}$，现在我们证明在结合类$X_k+Y_k\sqrt{D}=(m+k_0+\sqrt{D})(x_k+y_k\sqrt{D})$中有无穷多个$k$满足$2\nmid X_k$，$(X_k,\ m)=1$且$D\mid Y_k$.

（i）由于D为偶数，故$X_k+Y_k\sqrt{D}=(x_k+y_k\sqrt{D})(m+k_0+\sqrt{D})\equiv(1+\sqrt{D})(1+t\sqrt{D})\pmod 2$，其中$t$为某个整数. 故$X_k\equiv1\pmod 2$，即$2\nmid X_k$.

（ii）完全类似引理1中（ii）的证明得知$(X_k,m)=1$.

（iii）由于

$$Y_k=\sum_{i=0}^{[\frac{k}{2}]}\binom{k}{2i}x_0^{k-2i}y_0^{2i}D^i+(m+k_0)\sum_{i=0}^{[\frac{k-1}{2}]}\binom{k}{2i+1}x_0^{k-2i-1}y_0^{2i+1}D^i$$

$$\equiv x_0^{k-1}(x_0+ky_0(m+k_0))\pmod D$$

由于$(m+k_0,\ D)=(m+k_0,\ k_0m)=1$，$(y_0,\ D)=1$，故有正整数$k_1$使当$k\equiv k_1\pmod D$时，$D\mid Y_k$，这时令$Y_k=DY_k'$ 则有$X_k^2-DY_k^2=X_k^2-D^3Y_k'^2=m^2$，由于$X_k$奇，$m$奇，$(X_k,\ m)=1$，故$(X_k+m,\ X_k-m)=2$，从而有正整数$u_k$，$v_k$，$r_k$，$s_k$使得$X_k+m=2u_k^3v_k^2$，$X_k-m=2r_k^3s_k^2$，于是$m=u_k^3v_k^2-r_k^3s_k^2$，由于$(m,\ u_kv_kr_ks_k)=1$，这样就给出了$m$的无限多个真表示.

定理2 任意一个奇数m均可真表示为两个幂数之差，并且表法无限.

证明 由引理2得知只需找一个偶数k_0满足$(k_0,m)=1$，$D=(m+k_0)^2-m^2>0$非平方数，且$x^2-Dy^2=1$有解$x+y\sqrt{D}$满足$(D,\ y)=1$即可.

当$m=1$时，从〔1〕中结论得知，设$m>1$，$(m,\ 3)=1$，取$k_0=\frac{(m-1)(m-3)}{4}$，则$(k_0,\ m)=1$，$D=\frac{(m^2-1)(m^2-9)}{16}>0$非平方数，$x^2-Dy^2=1$有解$\frac{m^2-5}{4}+\sqrt{D}$满足$(y,D)=1$.

设$(m,\ 3)=3$，取$k_0=\frac{(m-1)(3m-1)}{4}$，则$(k_0,\ m)=1$，$D=\frac{(m^2-1)(9m^2-1)}{16}>0$非平方数，$x^2-Dy^2=1$有解$x+y\sqrt{D}=\frac{9m^2-5}{4}+3\sqrt{D}$满足$(y,D)=(3,D)=1$.

定理3 若$P\neq0$为偶数，则$2P$可真表示为两个幂数之差，并且表法无限.

证明 令$d=P^2+1$，则$x^2-dy^2=1$的基本解为$2P^2+1+2P\sqrt{d}$，$(2P,\ d)=1$，$d>0$非平方数，由于不定方程$x^2-dy^2=2P$有解$x+y\sqrt{d}=P+1+\sqrt{d}$，现在我们证明在结合类X_k+ $+Y_k\sqrt{d}=(P+1+\sqrt{P^2+1})(2P^2+1+2P\sqrt{P^2+1})^k$中有无穷多个$k$满足$d\mid Y_k$. 由于

$$Y_k=\sum_{i=0}^{[\frac{k}{2}]}\binom{k}{2i}((2P^2+1)^{k-2i}(2P)^{2i}d^i+(P+1)\sum_{i=1}^{[\frac{k-1}{2}]}\binom{k}{2i+1}(2P^2+1)^{k-2i-1}(2P)^{2i+1}d^i$$

$$\equiv(-1)^{k-1}((P+1)2Pk-1)(\bmod d)$$

由于P为偶数，故（$P+1$，P^2+1）$=1$，$(P^2+1$，$2P)=1$，从而有正整数k_1使得当$k\equiv k_1(\bmod d)$时，$Y_k\equiv 0(\bmod d)$，此时令$Y_k=dY'_k$，我们有$2P=X_k^2-d^3Y_k'^2$，又$X_k\equiv P+1(\bmod 2P)$故（X_k，$2P)=(P+1,2P)=1$，因此$2P$可真表示为两个幂数之差，并且表法无限．从定理1，2，3知任意正整数m均可真表示为两个幂数之差，并且表法无限．

参 考 文 献

〔1〕S. W. Golomb, Amer.Math. Monthly, 77(1970), 848—852.

〔2〕A. Makowski, Amer.Math. Monthly, 79(1972), 761.

〔3〕W. A. Sentance, Amer.Math. Monthly, 88(1981), 272—274.

〔4〕肖戎，数学研究与评论7(1987), 408—410.

〔5〕柯召、孙琦，谈谈不定方程，上海教育出版社，1980年.

On a Conjecture of Golomb on Powerful Numbers

Yuan Pingzhi

Abstract

S.W.Golomb conjectured that there are infinitely many numbers of the form $2(2b+1)$ $b>0$ which cannot be represented as the difference of two powerful numbers. In this paper, by using some properties of Pell equation, we have disproved the conjecture, and proved:

For any given number $m>0$, m have infinitely many proper representations as the difference of two powerful numbers.