第9卷 第4期
1989年11月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.9 No.4
Nov., 1989

拟投射生成元所带环的反自同构*

邓 培 民

（广西师范大学，桂林）

如众周知，除环上的有限维向量空间的线性变换环的反自同构，可以由一个弱厄米特纯量积来确定。这是Jacobson的一个经典结论．最近，姚慕生把此结论推广到了有投射生成元环的反自同构上．但对于含有非零基座的本原环，也有类似的结论，而本原环一般来说不是带有投射生成元的环。本文探讨了一个有拟投射生成元环的反自同构的表示，我们得到的结论概括了以上的结果．

本文中的环是结合环，但不一定含有单位元．

命题1 设 ${}_RU$ 是一个拟投射生成元，$J=T_{r_R}(U)$ 若有 $JU=U$，则 ${}_JU$ 也是拟投射生成元．若令 $U_R^*=\mathrm{Hom}_R(U,R)$，则有 $\Delta=\mathrm{End}\,{}_RU\cong\mathrm{End}\,U_R^*$．

证明中要用到［1］的结论．

若 τ 是环R的一个反自同构，我们从 ${}_RU$ 和 τ 可以定义 $u\circ r=\tau(r)u$，$u\in U$，$r\in R$，从而得到一个右R-模U，这时仍有 $\mathrm{End}\,U_R\cong\Delta\cong\mathrm{End}\,U_R^*$．

引理2 设 ${}_RM$、${}_RN$ 是给出的两个左R-模，τ 是R的一个反自同构．（1）由 τ 和 ${}_RM$，${}_RN$ 可得到 M_R、N_R，这时有 $\mathrm{Hom}_R^l(M,N)=\mathrm{Hom}_R^r(M,N)$；（2）由 τ 和 ${}_RR$ 可得到 $\mathring{R}_R$（加上"∘"为区别按R本身乘法所得到的右R-模 R_R），这时有 $\mathring{R}_R\cong R_R$．

引理3 设R是有非零基座S的本原环，${}_RU$ 是忠实的不可约模，虽然 ${}_RU$ 是拟投射生成元，$S=T_{r_R}(U)$，又设 τ 是R的任一反自同构，则有 $\tau(S)\subseteq S$．

利用［2］中的定理可证明此引理．

引理4 由 ${}_RU$ 和R的反自同构 τ，得到 $\mathring{U}_R$，则有 $\mathrm{Gen}\,{}_RU\cong\mathrm{Gen}\,\mathring{U}_R$．这里我们定义 $u\circ r=\tau(r)u$，$u\in U$，$r\in R$，其中 $\mathrm{Gen}\,{}_RU$ 的表示参见［3］．

命题5 设 ${}_RU$ 是拟投射生成元，$J=T_{r_R}(U)$，若有 $JU=U$，并对 $\forall x\in J$，有 $s\in J$，使得 $x=xs$，则有：（1）U_R^* 是拟投射生成元；（2）有等价 $\mathrm{Mod}\text{-}\Delta\to\mathrm{Gen}U_R^*=\mathrm{Gen}J_R$．

由命题5、引理4、2和[4、定理1]可得

命题6 在命题5的条件下，又设 τ 是R的一个反自同构，满足 $\tau(J)\subseteq J$，由 ${}_RU$ 和 τ 得到右R-模 U_R，那么当pic-Δ平凡时，则有 $U_R\overset{\eta}{\cong}U_R^*$，且 η 为在R-半线性模同构．

由命题6、引理4、2、1以及[5、Th1]、[2、Th2]，可证得本文的主要结论．

* 1987年8月27日收到．

定理 8 设 $_RU$是忠实的拟投射生成元，$J=Tr_R(U)$，若有$JU=U$，并对$\forall x\in J$，有$s\in J$，使得$x=xs$．又设τ是R的一个反自同构，满足$\tau(J)\subseteq J$，那么当 pic-Δ平凡时，τ可以由定义在U上的某个弱厄米特纯量积$g(x,y)$给出．即对任意的$r\in R$，若记r^*为r关于g的转置（它必存在），则有$\tau(r)=\eta^{-1}r^*\eta$，η是一个半线性左R-模同构，反过来，若在U上有一个弱厄米特纯量积$g(x,y)$，且R中任一个元r关于g的转置r^*均存在，则$\tau:r\mapsto r^*$是R的一个反自同构．

推论 9 若R是有非零基座的本原环，则R的任一反自同构τ，都可由一个除环上的向量空间U上的某个弱厄米特纯量积确定．反之，若在U上定义了一个弱厄米特纯量积$g(x,y)$，且R中任一个元r关于g的转置r^*均存在，则映射$\varphi:r\mapsto r^*$是R的一个反自同构．

当R是有单位元的结合环，$_RP$是忠实的投射生成元时，$J=Tr_R(P)=R$，且$_RP_{\mathrm{End}_RP}$是均衡模，从而又可得

推论 10 假定R的Picard群平凡，$_RP$是R-Mod的一个投射生成元，则R的任一个反自同构τ，都可以由定义在P上的某个弱厄米特纯量积$g(x,y)$给出．反之，设在P上定义了一个弱厄米特纯量积$g(x,y)$，且R中任一个元r关于g的转置r^*均存在，则映射φ：$r\mapsto r^*$是R的一个反自同构．

参 考 文 献

［1］姚慕生，拟投射生成元自同态环的理想格，数学年刊（1987）8A（1）.

［2］刘绍学，环与代数，科学出版社，1983.

［3］K. R. Fuller Density and Equivalence J. Algebra 29(1974), 528—550.

［4］姚慕生，模范畴的等价与环的同构，中国科学，第6期，1986.

Representation of an Anti Antomorphism of Ring With Quasi-Progenerator

Deng Peimin

(Guangxi Normal University)

Abstract

In this note we discussed an anti-automorphism of ring with quasi-progenerator. and showed that this, anti-automorphism can be determined by a scalar product.