第9卷 第4期
1989年11月

数学研究与研论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 1 No.4
Nov., 1989

除环上的全阵环的极小右理想与半素F-环*

郭元春

(吉林大学数学系 长春)

说环R是F-环，如R含一有限非零元集X，使对任意$a\in R$，若$aR\neq 0$，则$aR\cap X\neq\phi$（傅昶林[1]）．半素F-环可表为有限个除环上的全阵环的直和（周毅强[2]）．有人指出，这个命题的逆命题是不对的，今给出环为半素F-环的充要条件，先看除环上的全阵环．

设D为一除环，$n>1$为一自然数，R为D上n阶全阵环．极小右理想均为主右理想、取$a=(a_{ij})\neq 0\in R$，设其中某$a_{ij}\neq 0\in D$，则

$$b=\begin{bmatrix}a_{1j} & 0\cdots 0\\ \cdots\cdots & \\ a_{nj} & 0\cdots 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}\cdots a_{1n}\\ \cdots\cdots\\ a_{n1}\cdots a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\sigma\cdots 0\\ \cdots\cdots\\ 00\cdots 0\\ 10\cdots 0\\ 00\cdots 0\\ \cdots\cdots\\ 00\cdots 0\end{bmatrix}\neq 0\in aR.$$

bR中元具形

$$C=\begin{bmatrix}a_{1j} & b_{11}\cdots a_{1j} & b_{1n}\\ & \cdots & \\ a_{nj} & b_{11}\cdots a_{nj} & b_{1n}\end{bmatrix}$$

设$C\neq 0$，则有某$b_{1k}\neq 0\in D$，从而有

$$\begin{bmatrix}a_{1j} & 0\cdots 0\\ & \cdots\\ a_{nj} & 0\cdots 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{1j} & b_{11}\cdots a_{1j} & b_{1n}\\ & \cdots\cdots & \\ a_{nj} & \cdots\cdots b_{nj} & b_{1n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\ 0\cdots 0\\ \cdots\cdots\cdots\\ 0\ 0\cdots 0\\ b_{1k}^{-1}\ 0\cdots 0\\ 0\ 0\cdots 0\\ \cdots\cdots\\ 0\ 0\cdots 0\end{bmatrix}.$$

故$cR\subset bR\subset cR$，知bR为R的极小右理想．今取

$$a\neq 0\in\begin{bmatrix}a_1 & 0\cdots 0\\ & \cdots\cdots\\ a_n & 0\cdots 0\end{bmatrix}R=\begin{bmatrix}b_1\cdots 0\ 0\\ \cdots\\ b_n\ 0\cdots 0\end{bmatrix}R,$$

设

* 1987年12月28日收到．

$$a=\begin{bmatrix}a_1 a_{11}\cdots a_1 a_{1n}\\ \cdots \\ a_n a_{11}\cdots a_n a_{1n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1 b_{11}\cdots b_1 b_{1n}\\ \cdots\cdots \\ b_n b_{11}\cdots b_n b_{1n}\end{bmatrix}.$$

由 $a\neq 0$ 可设某 $a_i a_{1j}\neq 0$，从而有 $b_i b_{1j}=a_i a_{1j}\neq 0$，知 $a_i=b_i b_{1j}a_{1j}^{-1}=b_i c$.
再设某 $a_k\neq 0$，则 $b_k b_{1j}=a_k a_{1j}\neq 0$，有 $a_k=b_k b_{1j}a_{1j}^{-1}=b_k c$.
设某 $a_h=0$．若 $b_h\neq 0$，则 $0=a_h a_{1j}=b_h b_{1j}\neq 0$，矛盾．故 $a_h=0$ 导出 $b_h=0$．于是知 $(a_1,\cdots,a_n)=(b_1,\cdots,b_n)c$.
这样，我们有

$$\begin{bmatrix}a_1\ 0\cdots 0\\ \cdots \\ a_n\ 0\cdots 0\end{bmatrix}R=\begin{bmatrix}b_1\ 0\cdots 0\\ \cdots \\ b_n\ 0\cdots 0\end{bmatrix}R\neq 0\Longleftrightarrow(a_1,\cdots,a_n)=(b_1,\cdots,b_n)c,\quad c\neq 0.$$

由此即知 R 的极小右理想集为

$$\left\{\begin{bmatrix}0 & 0\cdots 0\\ \cdots\cdots & \\ 0 & 0\cdots 0\\ 1 & 0\cdots 0\\ x & 0\cdots 0\\ \cdots\cdots & \\ y & 0\cdots 0\end{bmatrix}R,\ 1\text{ 可在第一行},\ x,\cdots,y\in D\right\}.$$

设 D 的基数为 q．看 $(a_1,\cdots,a_n)$．如 $a_1=1$，则 $a_2,\cdots,a_n$ 各有 q 个取法，从而有 q^{n-1} 个取法．如 $a_1=0$，$a_2=1$，则有 q^{n-2} 个取法，总之有

$$q^{n-1}+q^{n-2}+\cdots+q+1$$

个取法，这样，我们有

定理1 设 D 为一带基数 q 的除环，n 为一自然数，R 为 D 上 n 阶全阵环，l 为 R 的极小右理想数．则当 $n=1$ 时 $l=1$．当 $n>1$ 而 q 有限时，$l=(1-q^n)/(1-q)$．当 $n>1$ 而 q 无限时，$l=q$.

半素环为 F-环时有且仅有有限个极小右理想（见〔2〕）．设 $n>1$．当 q 无限时，R 非 F-环．若 q 有限，则 D 为域，D 上 n 阶全阵环满足右极小条件，每个非零右理想均含极小右理想，从而知 R 为 F-环．再用开头引述的周毅强的结果，有

定理2 R 为半素 F-环的充要条件是 R 为有限个环 R_i 的直和，其中 R_i 为除环或为有限域上全阵环．

参 考 文 献

［1］傅昶林，一些非交换亚直既约环，数学研究与评论，Vol. 3, No.2(1983)，17--22.
［2］周毅强，半素 F-环的结构，同上，Vol.7, No.2（1987），321—322.