第9卷 第4期
1989年11月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.9 No.4
Nov., 1989

C^n中全纯映射的一种Schwarz引理（续）*

文 涛

（山东大学，济南）

文献[1]报道了本文的主要结果，这里叙述这些结果的证明，并作一些补充。符号沿用文献〔1〕的意义，为方便计，仍择要予以说明。

§1 主要定理的证明

设$0\in\Omega\subset C^n(n>1)$，$\Omega$为一开集，$g(z)$为$C^n$上的一个函数，取值于$C\cup\{\infty\}$．令$\omega=\{w\in C\,|\,|w|<1\}$，$W=\varphi(w)\in\mathrm{Hol}(\omega)$，以$w=0$为$\lambda(\lambda>1)$级零点，映$\omega$成域$\triangle$．对于$W\in\triangle$，定义函数

$$W\to\Psi(W)=\min_{\sigma}|w|,$$

其中$\sigma=\{w\in\omega\,|\,\varphi(w)=W\}$．

假定Ω，$g(z)$，$\varphi(w)$满足如下条件：存在点$z\in C^n$，使得

（1）$g(z)\neq 0,\infty$，$g(z)\in\triangle$；

（2）当$|w|<1$时，恒有$\dfrac{\varphi(w)}{g(z)}z\in\Omega$．

在C^n中定义集合E，$\widetilde{E}$，E_1和$\widetilde{E}_1$：

E为满足条件（1）、（2）的点所组成之集．

$z\in\widetilde{E}$，当且仅当$z\in\Omega$，$g(z)\in\triangle$，且存在一个点列$\{z^{(j)}\}\subset E$，使得

$$\lim_{j\to+\infty}z^{(j)}=z\ ,\quad \lim_{j\to+\infty}g(z^{(j)})=g(z)\ . \qquad (**)$$

$z\in E_1\Leftrightarrow g(z)\neq 0,\infty$，并且条件（2）成立．

$\widetilde{E}_1$则为满足$g(z)\neq\infty$，且存在点列$\{z^{(j)}\}\subset E_1$ 使（**）式成立的点所组成．

今设$m(x_1,\cdots,x_n)$为R^n_+上的一个非负连续函数，使$m(0,\cdots,0)=0$且当$x_j>0(j=1,\cdots,n)$时$m(x_1,\cdots,x_n)>0$．在C^n中定义函数$M(z)=m(|z_1|,\cdots,|z_n|)$，令$d=\{z\in C^n|M(z)<1\}$．

再设$B=\{f\}$是一个全纯映射族，其元素f适合：

$$f=(f_1,\cdots,f_n):\Omega\to\overline{d},$$

$f_i\in\mathrm{Hol}(\Omega)$，$\partial^\alpha f_i(0)=0(|\alpha|<k)$，$H_i^{(k)}(z)=\sum\limits_{|\alpha|=k}\dfrac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f_i(0)z^\alpha\not\equiv 0$．对任意一点$z\in E_1$可写

* 1987年11月17日收到．国家自然科学基金资助项目．

$f_i(\frac{\varphi(w)}{g(z)}z)=w^{\lambda k'}q_i(w,z)$，记$Q(w,z)=(q_1(w,z),\cdots,q_n(w,z))$.

定理1 设函数$m(x_1,\cdots,x_n)$除以上所述外，还使$M(z)$满足：

1° $M(wz)=|w|^sM(z)$，$\forall w\in\mathrm{C}$，$z\in\mathrm{C}^n$，s为一正数；

2° 对某一全纯映射$f\in B$，$M(Q(w,z))$当$z\in\mathrm{E}_1$和$|w|<1$时是w的次调和函数[4]，E_1及$Q(w,z)$的意义如上.

则对于上述f及$\widetilde{\mathrm{E}}$，$\widetilde{\mathrm{E}}_1$，有

$$M(f(z))\leqslant\Psi\{g(z)\}^{\lambda ks},\ z\in\widetilde{\mathrm{E}}; \tag{1}$$

$$M(H^{(k)}(z))\leqslant\left|\frac{\lambda!}{\varphi^{(\lambda)}(0)}g(z)\right|^{ks},\ z\in\widetilde{\mathrm{E}}_1. \tag{2}$$

这里$H^{(k)}(z)\equiv(H_1^{(k)}(z),\cdots,H_n^{(k)}(z))$.

证 因$M(z)$连续，故d是开集，再由条件1°，可证d是连通的，且是星形和圆型的区域，即$z\in\mathrm{d}$，蕴涵$tz\in\mathrm{d}(0\leqslant t\leqslant1)$和$e^{i\theta}z\in\mathrm{d}$.

设$z^{(0)}\in\mathrm{E}_1$，$\zeta=g(z^{(0)})$. 当$|w|<1$时，必有$f(\frac{\varphi(w)}{\zeta}z^{(0)})\in\bar{\mathrm{d}}$，即$M(f(\frac{\varphi(w)}{\zeta}z^{(0)}))\leqslant1$. 而

$$M(f(\frac{\varphi(w)}{\zeta}z^{(0)}))=M(w^{\lambda k}Q(w,z^{(0)}))=|w|^{\lambda ks}M(Q(w,z^{(0)})),$$

所以由条件2°可知，当$|w|\leqslant r(r<1)$时

$$Mf(\frac{\varphi(w)}{\zeta}z^{(0)}))/|w|^{\lambda ks}=M(Q(w,z^{(0)}))\leqslant\frac{1}{r^{\lambda ks}}$$

令$r\to1$，得到

$$M(Q(w,z^{(0)}))\leqslant1, \tag{3}$$

$$M(f(\frac{\varphi(w)}{\zeta}z^{(0)}))\leqslant|w|^{\lambda ks}. \tag{4}$$

当$z^{(0)}\in\mathrm{E}$时，(4)式中可取w，使得$\varphi(w)=\zeta$，而$|w|=\Psi(\zeta)$. 所以(1)式在点$z^{(0)}$成立，从而在集E成立. 再由$\widetilde{\mathrm{E}}$的定义及$M(z)$的连续性可知(1)式在$\widetilde{\mathrm{E}}$成立.

当$z^{(0)}\in\mathrm{E}_1$时，

$$q_i(0,z^{(0)})=\left[\frac{\varphi^{(\lambda)}(0)/\lambda!}{g(z^{(0)})}\right]^kH_i^{(k)}(z^{(0)}),$$

由此式及(3)式和$M(z)$的条件1°，可得

$$M(H^{(k)}(z^{(0)}))=\left|\frac{g(z^{(0)})}{\varphi^{(\lambda)}(0)/\lambda!}\right|^{ks}M(Q(0,z^{(0)}))\leqslant\left|\frac{\lambda!}{\varphi^{(\lambda)}(0)}g(z^{(0)})\right|^{ks}, \tag{6}$$

此即(2)式在E_1成立. 再由$\widetilde{\mathrm{E}}_1$的定义及$M(z)$的连续性可知(2)式在$\widetilde{\mathrm{E}}_1$成立.

定理1蕴涵下面的定理$1'$.

定理$1'$ 若将定理1的条件2°改为：对任意全纯映射$f\in B$，$M(Q(w,z))$当$z\in\mathrm{E}_1$和$|w|<1$时皆是w的次调和函数，其他条件不变. 则对于B内任意一个元素f，(1)、(2)式皆成立.

定理1和$1'$有下述推论.

推论 若定理 1 的条件2°改为：$m(x_1,\cdots,x_n)$ 是$\mathbf{R}_+^n$上的凸函数，且当$x_j\leqslant x_j'$ $(1\leqslant j\leqslant n)$ 时，$m(x_1,\cdots,x_n)\leqslant m(x_1',\cdots,x_n')$，则定理$1'$ 的结论成立。

证明可以仿照〔2〕的定理 4 的证法。

定理 2 若将定理 1 的条件1°、2°改为：

（i）$M(wz)=|w|^{\nu}M_1(w,z)$，$\forall w\in\mathbf{C}^n$，$z\in\mathbf{C}^n$，ν为一正数；这里$M(w,z)$是关于变元w,z的连续函数。

（ii）对某一全纯映射 $f\in B$，$M_1(w^{\lambda k},Q(w,z)$当$z\in\mathrm{E}$，$|w|<1$ 时是w的次调和函数。

则对于上述的f，有

$$M(f(z))\leqslant\Psi\{g(z)\}^{\lambda k\nu},\quad z\in\widetilde{\mathrm{E}}.\tag{7}$$

证 设$z^{(0)}\in\mathrm{E}$，$\zeta=g(z^{(0)})$。当 $|w|<1$ 时

$$M(f(\frac{\varphi(w)}{\zeta}z^{(0)}))=M(w^{\lambda k}Q(w,z^{(0)}))=|w|^{\lambda k\nu}M_1(w^{\lambda k},Q(w,z^{(0)})).\tag{8}$$

由条件（ii），用定理 1 的证明中的方法可证出

$$M(f(\frac{\varphi(w)}{\zeta}z^{(0)}))\leqslant|w|^{\lambda k\nu}.$$

和定理 1 一样取w，并由$M(z)$的连续性即得（7）式。

§2 例子与应用

令
$$\Phi(z)=\sum_{\alpha\in N^n}a_\alpha|z_1|^{\alpha_1}\cdots|z_n|^{\alpha_n}\tag{9}$$

并设$a_0=0$，$a_\alpha\geqslant0$ $(\forall\alpha)$，并存在正整数ν，使 $|\alpha|=\nu$，$a_\alpha>0$。以$\nu(\Phi)$记这样的ν的最小者。设（9）式之级数于$|z_1|\geqslant0,\cdots,|z_n|\geqslant0$ 为收敛。

以上定义的$\Phi(z)$满足定理 2 中$M(z)$的条件，$\nu(\Phi)$即为定理 2 中的ν。这说明定理 2 蕴涵[1]的定理 Ⅱ．证明如下：

$$\Phi(wz)=|w|^{\nu(\Phi)}\sum_{\alpha\in N^n}a_\alpha|w|^{|\alpha|-\nu(\Phi)}|z_1|^{\alpha_1}\cdots|z_n|^{\alpha_n}\equiv|w|^{\nu(\Phi)}\widetilde{\Phi}(w,z).\tag{10}$$

设N为正整数，记

$$\widetilde{\Phi}_N(w,z)=\sum_{|\alpha|<N}a_\alpha|w|^{|\alpha|-\nu(\Phi)}|z_1|^{\alpha_1}\cdots|z_n|^{\alpha_n}.\tag{11}$$

若$f\in B$，$z\in E$，$|w|<1$，则

$$\widetilde{\Phi}_N(w^{\lambda k},Q(w,z))=\sum_{|\alpha|<N}a_\alpha|w|^{\lambda k[|\alpha|-\nu(\Phi)]}|q_1(w,z)|^{\alpha_1}\cdots|q_n(w,z)|^{\alpha_n}.\tag{12}$$

因为

$$\log(|w|^{\lambda k[|\alpha|-\nu(\Phi)]}\prod_{j=1}^{n}|q_j(w,z)|^{\alpha_j})=\lambda k[|\alpha|-\nu(\Phi)]\log|w|+\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\log|q_j(w,z)|$$

是次调和的，所以和式（12）的每一项，因而（12）式本身皆是w的次调和函数。又因a_α皆非负数，因此

$$\widetilde{\Phi}(w^{\lambda k},Q(w,z))=\sup_{N\in N}\widetilde{\Phi}_N(w^{\lambda k},Q(w,z)).\tag{13}$$

由（9）的收敛性可知（13）式是w的连续函数，所以也是w的次调和函数[4]。此即$\Phi(z)$满足$M(z)$的条件（ii），满足$M(z)$的其余条件是显然的。证毕。

关于定理 1、$1'$ 的例子。

设$\Phi\neq I\subset R$. 对于$\tau\in I$，令

$$P_\tau(x)=(\sum_{\beta\in V}a_\beta x^\beta)^{s/\mu(\tau)},\tag{14}$$

式中V是集$\{\beta\in R_+^n||\beta|=\mu(\tau)\}$的一个有限子集，$\mu(\tau)$可取任何正数. $x=(x_1,\cdots,x_n)$，$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，$x^\beta=x_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n}$.

假设$\{p_\tau(x)\}_{\tau\in I}$是$R_+^n$上的等度连续函数族，我们定义

$$\widetilde{M}(z)=\sup_{\tau\in I}p_\tau(|z_1|,\cdots,|z_n|).\tag{15}$$

则$\widetilde{M}(z)$对于任意的$f\in B$满足定理1中$M(z)$的条件.

证明如下：首先可证

$$\sup_{\tau\in I}p_\tau(|z_1|,\cdots,|z_n|)<+\infty.\tag{16}$$

设若不然，有一点$z'=(z_1',\cdots,z_n')\neq0$, 使得

$$\sup_{\tau\in I}p_\tau(|z_1'|,\cdots,|z_n'|)=+\infty.$$

一方面，由等度连续性，必存在$\delta>0$，使当$|z|=\max\limits_{j=1,\cdots,n}|z_j|<\delta$时，有

$$|p_\tau(|z_1|,\cdots,|z_n|)-p_\tau(0,\cdots,0)|<1/2$$

对一切$\tau\in I$成立. 所以必有

$$\sup_{\tau\in I}p_\tau(|z_1|,\cdots,|z_n|)\leqslant1/2,\ |z|<\delta.\tag{17}$$

另方面，对任何正整数N，都有$\tau_0\in I$存在，使得

$$p_{\tau_0}(|z_1'|,\cdots,|z_n'|)\geqslant N^s|z'|^s.$$

令$\omega=\dfrac{1}{N|z'|}$ 及$z''=wz'$，则

$$p_{\tau_0}(|z_1''|,\cdots,|z_n''|)=(\frac{1}{N|z'|})^s p_{\tau_0}(|z_1'|,\cdots,|z_n'|)\geqslant1,\tag{18}$$

而$|z''|=\dfrac{1}{N}$. 所以（18）式与（17）式矛盾，故（16）式成立.

由于$p_\tau(|wz_1|,\cdots,|wz_n|)=|w|^s p_\tau(|z_1|,\cdots,|z_n|)$，于是$\widetilde{M}(wz)=|w|^s\widetilde{M}(z)$，即满足1°.
由（16）式及$\{p_\tau(|z_1|,\cdots,|z_n|)\}_{\tau\in I}$的等度连续性可证$\widetilde{M}(z)$是连续的.
再证$\widetilde{M}(z)$对于任意的$f\in B$满足条件2°.
对于任意的$\tau\in I$，按定义可写

$$p_\tau(|z_1|,\cdots,|z_n|)=(\sum_{\beta\in V}a_{\beta_1\cdots\beta_n}|z_1|^{\beta_1}\cdots|z_n|^{\beta_n})^{s/\mu(\tau)}.\tag{19}$$

当$f\in B$, $z\in E_1$, $|w|<1$ 时,

$$\log(a_{\beta_1\cdots\beta_n}\prod_{j=1}^n|q_j(w,z)|^{\beta_j})=\log a_{\beta_1\cdots\beta_n}+\sum_{j=1}^n\beta_j\log|q_j(w,z)|$$

是w的次调和函数，所以[4]

$$\log p_\tau(|q_1(w,z)|,\cdots,|q_n(w,z)|)=\frac{s}{\mu(\tau)}\log\sum_{\beta\in V}(a_{\beta_1\cdots\beta_n}\prod_{j=1}^n|q_j(w,z)|^{\beta_j})$$

是次调和的，故$p_\tau(|q_1(w,z)|,\cdots,|q_n(w,z)|)$是次调和的. 又因

$$\widetilde{M}(Q(w,z))=\sup_{\tau\in I}P_{\tau}(|q_1(w,z)|,\cdots,|q_n(w,z)|) \qquad (20)$$

且由$\widetilde{M}(z)$的连续性还知$\widetilde{M}(Q(w,z))$是连续的，所以$\widetilde{M}(Q(w,z))$是w的次调和函数．证毕．

关于从属性的讨论．

我们设$g(z)$具有〔3〕§4 Ω的第一种定义的意义及$\varphi(w)=w$．令$\Omega(r)=\{z\in C^n||g(z)|<r\}$．$\Omega=\Omega(1)$ 和$d(\rho)=\{z\in C^n|M(z)<\rho\}$，因而$d=d(1)$．

如果$M(z)$及映射f满足定理1的条件，则

$$\{\Omega(r);f\} \text{ 从属于 } \{d(r^{ks});id\},\ 0<r<1; \qquad (21)$$

$$\{\Omega(r);H^{(k)}(z)\} \text{ 从属于 } \{d(r^{ks});id\},\ r>0. \qquad (22)$$

今证（21）式．因为$\varphi(w)=w$，故$\Psi(W)=|W|$．于是在所设条件下，$\widetilde{E}=\Omega$，故当$z\in\Omega(r)$时，有

$$M(f(z))<|g(z)|^{ks}<r^{ks}.$$

因此，$f(z)\in d(r^{ks})$，所以（21）式成立．

由（2）式可知，在所设条件下，有

$$M(H^{(k)}(z))\leqslant|g(z)|^{ks},\ z\in C^n. \qquad (23)$$

因此（22）式成立．

假若$M(z)$满足定理1′的条件，且设有一双全纯映射F及一个$f\in B$适合：$\{\Omega;f\}$从属于$\{d;F\}$．则

$$\{\Omega(r);f\} \text{ 从属于 } \{d(r^{ks});F\},\ 0<r<1; \qquad (24)$$

$$\{\Omega(r);H^{(k)}(z)\} \text{ 从属于 } \{d(r^{ks});L(z)\},\ r>0. \qquad (25)$$

这里$L(z)=(L_1(z),\cdots,L_n(z))$，$L_i(z)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial z_j}\right)_{z=0}z_j$．

证明 令$\omega(z)=F^{-1}(f(z))\equiv G(f(z))$．由所设条件，当$z\in\Omega$时，则有$\omega(z)\in d$．又因

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial z_j}=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial G_i}{\partial f_l}\frac{\partial f_l}{\partial z_j}\quad(i,j=1,\cdots,n) \qquad (26)$$

等，可证$\partial^{\alpha}\omega_i(0)=0\ (|\alpha|<k,\ i=1,\cdots,n)$，因此$\omega(z)\in B$．所以由定理1′可得

$$M(\omega(z))\leqslant|g(z)|^{ks}. \qquad (27)$$

设F把$d(r^{ks})$映为D_r．要证当$z\in\Omega(r)$时，有$f(z)\in D_r$．因为$f(z)=F(\omega(z))$，故只要证$\omega(z)\in d(r^{ks})$．但由（27）式可知当$z\in\Omega(r)$时，有

$$M(\omega(z))\leqslant|g(z)|^{ks}<r^{ks},$$

即$\omega(z)\in d(r^{ks})$，所以（24）式成立．

再证（25）式．记$\sum_{|\alpha|=j}\frac{1}{\alpha!}\partial^{\alpha}\omega_i(0)z^{\alpha}=H^{(j)}_{\omega_i}(z)$以及$(H^{(j)}_{\omega_1}(z),\cdots,H^{(j)}_{\omega_n}(z))=H^{(j)}_{\omega}(z)$．

设L把$d(r^{ks})$（$r>0$）映为D^*_r，要证$H^{(k)}_f(z)$映$\Omega(r)$入D^*_r，即要证当$z\in\Omega(r)$时，$H^{(k)}_f(z)\in D^*_r$．我们有（参见[3]）

$$H^{(k)}_f(z)=L(H^{(k)}_{\omega}(z)).$$

因$\omega(z)$满足定理1′的条件，故有

$$M(H^{(k)}_{\omega}(z))\leqslant|g(z)|^{ks},\ z\in C^n. \qquad (28)$$

所以，当$z\in\Omega(r)$时，有

$$M(H_{\omega}^{(k)}(z))\leqslant r^{ks}.$$

此即$H_{\omega}^{(k)}(z)\in d(r^{ks})$. 因此$L(H_{\omega}^{(k)}(z))\in D_r^*$，证毕.

参 考 文 献

〔1〕文涛，C^n中全纯映射的一种Schwarz引理，科学通报，30（1985），3:172—174.

〔2〕文涛，关于Schwarz引理的一种推广，数学学报，28（1985），1:103—108.

〔3〕庄圻泰，关于两个复变数的全纯函数的一个Schwarz引理，数学学报，25:3（1982），374—384.

〔4〕L.Hörmander, An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, D. Van Nostrand, Princeton, 1966.