第9卷 第4期
1989年11月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.9 No.4
Nov., 1989

真同态像都是挠模的挠自由模*

辛 林

（福建师范大学数学系，福州市）

设R是有单位的结合环，在不特别指明时，R-模均指右模．R上的右理想集合G称为Gabriel拓扑，如果非空集G满足条件：

i） $\forall A\in G$，$b\in R$，则 $(A:b)\in G$，这里 $(A:b)=\{r\in R|br\in A\}$．

ii）如果 B 是R的右理想并且有 $A\in G$ 使得 $(B:a)\in G$，$\forall a\in A$，则 $B\in G$．

设(T,F)是相应于G的torsion theory．我们知道：T中模称为挠模，而F中模称为挠自由模；F是遗传的，但未必是同态闭类．这就可能出现两种极端情况。一种情况是：对 $M\in F$，M的所有同态像 M' 仍然属于F；另外一种情况是：M的任意非零真同态像 M' 都不属于F，这里说的真同态像意指存在M的子模 $L\neq 0$，使得 $M'\cong M/L$．例如F是TTF-类时就是前面一种情况(见[1]第六章§8)．而后面一种情形就是本文要讨论的内容．

本文用到的所有术语都同[1]．

定理1 如果模M的任意非零真同态像都不属于F，则M的任意非零真同态像都属于T．

证明 设 t 是相应于torsion theory(T，F)的左正合根．M/L是M的非零真同态像．由假设 $t(M/L)=I/L\neq 0$，其中I是M的真包含L的子模，从而 $t(M/I)=t((M/L)/t(M/L))=0$，即 $M/I\in F$，所以 $M=I$，于是 $M/L\in T$． ■

记 $N_G=\{0\neq M\in F|M$ 的真同态像都属于T$\}$．

定义1 右R-模M称为一致的，如果M的非零子模都是本质子模．

定义2 右R-模M称为拟内射的，如果M的任意子模S到M的每个同态都是M的自同态在S上的限制．

由[2]知，对每个模M，存在极小拟内射扩张 $\overline{M}$，即 $\overline{M}$ 是包含M的极小拟内射模，它称为M的拟内射包络．如果记 $\widehat{M}$ 表示包含M的内射包络，则由[2]还知道，$\overline{M}$ 是 $\widehat{M}$ 的完全不变子模，即：$(\mathrm{End}\,\widehat{M})\cdot\overline{M}=\overline{M}$．

定理2 $N_G=\{M|\mathrm{Hom}(M,E)\neq 0$，并且M到E的非零同态都是单同态$\}$，其中E是上生成(T，F)的内射模．如果 $M\in N_G$，则M是一致模，并且M到 $\overline{M}$ 的非零同态都是单同态．

证明 设 $M\in N_G$，由 $M\in F\Rightarrow \mathrm{Hom}(M,E)\neq 0$，若 $f\neq 0\in \mathrm{Hom}(M,E)$，则 f 诱导出非零同态 $\overline{f}:M/\mathrm{Ker}\,f\to E$，所以 $\mathrm{Ker}\,f=0$．反之，由条件可设M是E的子模，于是 $M\in F$，对M的任意非零真同态像M/L，如果有 $0\neq f\in \mathrm{Hom}(M/L,E)$，则合成映射 $M\to M/L\xrightarrow{f}E$ 是M

* 1987年11月30日收到．

到E的非零同态，显然这个同态不是单同态，故必有$\mathrm{Hom}(M/L, E)=0$，即$M/L\in T$．

如果$M\in N_G$，则M的非零子模L到M的非零同态均是单同态．这由下面的交换图立即得：如果存在M的非零子模K使$L\cap K=0$，则$L+K$是M的非零子模，设P_L是$L+K$到L上的投影，则P_L是$L+K$到M的具有核K的非零同态，这与P_L应是单同态矛盾．所以M是一致模．由于M到$\overline{M}$的非零同态都是M到E的同态，所以M到$\overline{M}$的非零同态都是单同态．■

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[ddl, dashed] \\ & M \arrow[d] & \\ & E & \end{tikzcd}$$

定理 3 设R－模M是一致，并且M到$\overline{M}$的非零同态都是单同态，则存在一个Gabriel拓扑G，使$M\in N_G$．

证明 由于M到$\overline{M}$的非零同态都是单同态，并且M到$\widehat{M}$的任意同态都是$\widehat{M}$的自同态在M上的限制，由$M\subseteq\overline{M}$可得M到$\widehat{M}$的任意非零同态都是单同态．设G是由$\widehat{M}$上生成的torsion theory 的相应Gabriel拓扑，则由定理2，$M\in N_G$．■

［1］中指出，如果内射模E上生成torsion theory（T，F），则直积ΠE也上生成同样的（T，F）．于是如果模M是关于（T，F）的挠自由模，则由［1］的命题Ⅵ.3.9，可设M是E的子模．

定义 3 如果对M到内射模E的任意非零同态f，有$f(M)$的子模$U\neq 0$以及M的子模V使U非零同态于V，即有$0\neq g:U\to V$．则称M是E的拟本质子模．

例 1 M是$\widehat{M}$的拟本质子模．

例 2 M_i是互不同构的单模，$i=1,2$，则M_i是$\widehat{M}_1\oplus\widehat{M}_2$的拟本质子模．

由定义及定理2，如果$M\in N_G$，则M是E的拟本质子模．因为$f:M\to E$是单的，则$f(M)\cong M$．

定理 4 设模M是一致的，并且M到$\overline{M}$的非零同态都是单同态；设E是上生成torsion theory（T，F）的内射模，G是相应的Gabriel拓扑，如果M是E的拟本质子模，则$M\in N_G$．

证明 由定理3，存在由$\widehat{M}$上生成的torsion theory相应的Gabriel拓扑G_0，使$M\in N_{G_0}$．设$f:M\to E$是非零同态，因为M是E的拟本质子模，所以存在子模U、$V\subseteq M$，使$g:f|_U(U)\to V$是非零同态．于是由定理2的证明知，$gf|_U$是M的子模U到M的非零单同态，所以$f|_U$是单同态．但M是一致模，U在M中是本质的，因此f是单同态．由定理2，$M\in N_G$．■

下面我们均设E是上生成torsion theory（T，F）的内射模，G是相应的Gabriel拓扑．定理2指出：如果$M\in N_G$，则M的任意非零子模L也有$L\in N_G$．我们将进一步指出，M的拟内内射包络$\overline{M}\in N_G$．

定理 5 如果$M\in N_G$，则$\overline{M}\in N_G$．

证明 设t是相应于Gabriel拓扑G的左正合根，设G（M）是适合$G(M)/M=t(\widehat{M}/M)$的$\widehat{M}$的包含M的子模．则$M_G\overset{d\cdot f}{=\!=}G(M/t(M))$正是［1］意义下相应于G的分式模（见［1］的命题Ⅸ.2.2和2.4）．显然，M是挠自由模时，$M_G=G(M)$，并且M是M_G的本质子模．由［1］的命题Ⅸ.1.8，M_G是挠自由模，但对M_G的任意非零子模L，由于$M/L\cap M$以及M_G/M都是挠模，根据挠类的扩张封闭性：

$$0\to M/L\cap M\to M_G/L\cap M\to M_G/M\to 0\ (\text{正合})$$

得$M_G/L\cap M$是挠模，但$M_G/L\cong(M_G/L\cap M)/(L/L\cap M)$，所以$M_G/L$是挠模．于是$M_G\in N_G$．根据［1］的命题Ⅸ.2.1，$M_G$是M的拟内射扩张．于是$M_G\supseteq\overline{M}$．由前面说明，$\overline{M}\in N_G$．

■

推论 1 如果$M\in N_G$，则M_G是拟内射模，并且$M_G\in N_G$.

定理2和定理4表明，R-模$M\in N_G$，当且仅当下面三个条件同时成立：

1．M是一致模；

2．M到拟内射包络$\overline{M}$的非零同态是单同态；

3．M是E的拟本质子模.

例 3 对例2中的互不同构的单模M_1、M_2，设$E=\widehat{M}_1\oplus\widehat{M}_2$上生成的torsion theory是(T, F)，G是相应的Gabriel拓扑，则$M_i\in N_G$，$i=1,2$.

例 4 $\mathbf{Z}_\mathbf{Z}$的内射包络、拟内射包络都是$\mathbf{Q}_\mathbf{Z}$．其中$\mathbf{Q}$是有理数加群．设G是相应于$\mathbf{Q}_\mathbf{Z}$上生成的torsion theory的Gabriel拓扑，则$\mathbf{Z}_\mathbf{Z}\in N_G$．注意，$\mathbf{Z}_\mathbf{Z}$不是单模.

对环R上的Gabriel拓扑G，如果左R-模R_G(注：$G(R)/R=t(\widehat{R}/R)$，$R_G=G(R/t(R))$)是G-可除的，即：$\forall K\in G$，$R_G=K\cdot R_G$，那么称G是完备Gabriel拓扑(此定义也可见[1]的第11章)．如果对模M的任意非零子模L，存在M到L的单同态，则称M是可缩的；模M是可缩的，并且M的子模到M的非零同态都是单同态，则称M是临界可缩的。例如，整数环$\mathbf{Z}$上的模$\mathbf{Z}_\mathbf{Z}$，就是临界可缩$\mathbf{Z}$-模．[3]的命题3指出，对完备Gabriel拓扑G，如果M是挠自由模，那么由M是忠实临界可缩R-模可推得M_G是忠实临界可缩R_G-模．由于有典范同态$R\to R_G$，所以M_G也可作为R-模．一般情况下，即使G是完备Gabriel拓扑，M_G是临界可缩R_G-模，也未必是临界可缩R-模．例，$\mathbf{Z}$上的Gabriel拓扑$G=\{n\mathbf{Z}\mid\forall n\neq 0\in\mathbf{Z}\}$是完备的(见[1]的例XI.1)，$\mathbf{Z}_\mathbf{Z}\in N_G$．$\mathbf{Z}_G(=\mathbf{Q})$是临界可缩$\mathbf{Z}_G$-模，但不是临界可缩$\mathbf{Z}$-模．事实上，我们有下面的定理：

定理 6 设G是Gabriel拓扑，$M\in N_G$，如果M_G是临界可缩R-模，则M是单模.

证明 由上面推论1，M_G是临界可缩拟内射R-模，由[4]的推论1.3，M_G是R-单模，从而$M=M_G$是单模. ■

定理 7 设G是完备Gabriel拓扑，$M\in N_G$．如果M是临界可缩R-模，则M_G是单R_G-模.

证明 由[3]的命题3，M_G是临界可缩R_G-模，又由上面推论1，M_G是拟内射R-模．下面证明M_G是拟内射R_G-模：首先注意到M_G是挠自由R-模．典范同态$\psi:R\to R_G$，Cokerψ是挠模(见[1]引理IX.1.5)．设L是M_G的R_G-子模，$f:L\to M_G$是R_G-同态，作为R-子模和R-同态，存在f的R-同态扩张$\overline{f}:M_G\to M_G$，使$\overline{f}|_L=f$．任给$x\in M_G$，令

$$g_1:R_G\to M_G:a\longmapsto\overline{f}(xa),\quad\forall a\in R_G.$$

$$g_2:R_G\to M_G:a\longmapsto\overline{f}(x)a,\quad a\in R_G.$$

则，g_1, g_2都是R-同态且$g_1|_{\psi(R)}=g_2|_{\psi(R)}$.于是，$g_1-g_2$诱导出R-同态：Coker$\psi\to M_G$．所以$g_1=g_2$，即$\overline{f}(xa)=\overline{f}(x)a$，$\forall x\in M_G$，$a\in R_G$．这就证明了$M_G$是拟内射$R_G$-模，由[4]的推论1.3，$M_G$是单$R_G$-模. ■

由上面证明，不难知道：

推论 1 若R_G-模E作为R-模是拟内射挠自由模，则E是拟内射R_G-模．其中G是(完备)Gabril拓扑.

推论 2 设G是完备Gabriel拓扑，$M\in N_G$，如果M是忠实临界可缩R-模，则M_G是忠实单R_G-模，从而R_G是本原环.

证明 M_G的忠实性证明见[3]的命题3. ■

参 考 文 献

[1] B. Stenstrom Rings of qbotients Springer-Verlag New York 1975.

[2] C. Faith Algebra Ⅱ Ring theory Springer-Verlag New York 1976.

[3] W. K. Nicholson, J. F. Watters and J. M. Zelmanowitz On extensions of weakly primitive r ings Can. J. Math. Vol. 32.4(1980) 937—944.

[4] J. Zelmanowitz weakly primitive rings Comm. in algebra 9(1)(1981) 23—45.

Torsion Free Modules in Which Every Proper Homorphism Image is Torsion

Xin Lin

Abstract

This paper is devoted to proving the following fact:

Let G be a Gabriel topology, E an injective module cogenerating torsion theory (T, F) associated to G. $N_G = \{0 \neq M \in F \mid M/L \in T$ for every nonzero submodule $L \subseteq M\}$. then, $M \in N_G$ if and only if

1) M is uniform,

2) every nonzero homomorphism form M into $\overline{M}$ is injective,

3) M is a quasi-essential submodule of E.

At the same time, we proved that if a module $M \in N_G$ then $\overline{M}$, $M_G \in N_G$. Finally, we considered critically compressible modules, under the assumption that Gabriel topology G is perfect.