第10卷 第2期
1990年5月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.10 No.2
May, 1990

关于切点单形的两个不等式

苏 化 明

（合肥工业大学应用数学力学系）

定义 在n维欧氏空间E^n中，设n维单形Σ_A的顶点为A_i（$i=1,2,\cdots,n+1$），Σ_A的内切球和各侧面的切点设为A_i'，则称以A_i'为顶点的单形$\Sigma_{A'}$为单形Σ_A的切点单形．

若从n维单形Σ_A（$\Sigma_{A'}$）的$n+1$个顶点中任取$m+1$个顶点，则可组成$\mu=\binom{n+1}{m+1}$个子单形，这些m维单形的体积记为$V_h^{(m)}$（$V_h'^{(m)}$）〔$m=1,2,\cdots,n$；$h=1,2,\cdots,\binom{n+1}{m+1}$〕．若$(V_h^{(m)})^2$、$(V_h'^{(m)})^2$的$\lambda$次初等对称多项式记为$P_\lambda$、$P_\lambda'$；$V_h^{(m)}$、$V_h'^{(m)}$的$\lambda$次初等对称多项式记为$Q_\lambda$、$Q_\lambda'$〔$\lambda=1,2,\cdots,\binom{n+1}{m+1}$〕，我们有如下的

定理 n维单形Σ_A和它的切点单形$\Sigma_{A'}$的不变量P_λ与P_λ'、Q_λ与Q_λ'之间有不等式

$$P_\lambda' \leqslant n^{-2m\lambda}P_\lambda\ ; \tag{1}$$

$$Q_\lambda' \leqslant n^{-m\lambda}Q_\lambda, \tag{2}$$

（1）、（2）两式中等号当且仅当Σ_A为正则单形时成立．

几个引理：

引理1 设$\mathfrak{C}_N=\{c_1,c_2,\cdots,c_N\}$是$E^n$（$N>n$）中的一个有限点集，从$\mathfrak{C}_N$中任取$k+1$个点，以它们为顶点作一个$k$维单形，把所有这些单形的$k$维体积的乘积记为$M_k$，则有

$$\left[\frac{k!}{\sqrt{k+1}}M_k^{\frac{1}{\binom{N}{k+1}}}\right]^{\frac{1}{k}} \geqslant \left[\frac{l!}{\sqrt{l+1}}M_l^{\frac{1}{\binom{N}{l+1}}}\right]^{\frac{1}{l}} \quad (1\leqslant k<l\leqslant n) \tag{3}$$

其中等号当且仅当所有的l维单形均为正则单形时成立．

证明 由[1]中的系1知，n维单形Σ的体积V及其诸侧面积V_i之间有不等式

$$\left(\prod_{i=1}^{n+1}V_i\right)^{\frac{n}{n^2-1}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left[\frac{n^{3n-2}}{(n-1)!^2}\right]^{\frac{1}{2(n-1)}}V \tag{4}$$

其中等号当且仅当单形Σ为正则单形时成立．

对E^n中任一k维单形$\mathscr{S}$（$1\leqslant k<l\leqslant n$），运用（4），有

$$\left(\prod_{i=1}^{k+1}V_i^{(k-1)}\right)^{\frac{k}{k^2-1}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{k+1}}\left[\frac{k^{3k-2}}{(k-1)!^2}\right]^{\frac{1}{2(k-1)}}V_j^{(k)} \tag{5}$$

其中$V_i^{(k-1)}$表示单形$\mathscr{S}$的侧面面积，$V_j^{(k)}$表示$\mathscr{S}$的体积．

由于$\mathfrak{C}_N=\{c_1,c_2,\cdots,c_N\}$共可组成$\binom{N}{k+1}$个$k$维单形，故对$\mathfrak{C}_N$而言，类似于(5)的不

* 1988年10月4日收到．

等式共有 $\binom{N}{k+1}$ 个，将这些不等式相乘，得

$$\left[\prod_{i=1}^{\binom{N}{K}} V_i^{(k-1)}\right]^{\frac{k(k+1)\binom{N}{k+1}}{(k^2-1)\binom{N}{k}}} \geqslant (k+1)^{-\frac{1}{2}\binom{N}{k+1}}\left[\frac{k^{3k-2}}{(k-1)^2}\right]^{\frac{1}{2(k-1)}\binom{N}{k+1}} \prod_{j=1}^{\binom{N}{k+1}} V_j^{(k)}$$

从而有

$$M_{k-1}^{\frac{1}{(k-1)\binom{N}{k}}}(k+1)^{-\frac{1}{2k}}\left[\frac{k^{3k-2}}{(k-1)!^2}\right]^{\frac{1}{2k(k-1)}} M^{\frac{1}{k\binom{N}{k+1}}}$$

将 k 换成 $k+1$，则有

$$M^{\frac{1}{k\binom{N}{k+1}}} \geqslant (k+2)^{-\frac{1}{2(k+1)}}\left[\frac{(k+1)^{3k+1}}{k!^2}\right]^{\frac{1}{2k(k+1)}} M_{k+1}^{\frac{1}{(k+1)\binom{N}{k+2}}} \tag{6}$$

从（6）我们不难得到

$$M_k^{\frac{1}{k\binom{N}{k+1}}} \geqslant \prod_{i=1}^{l-k}\left\{(k+i+1)^{-\frac{1}{2(k+i)}}\left[\frac{(k+i)^{3(k+i)-2}}{(k+i-1)!^2}\right]^{\frac{1}{2(k+i-1)(k+i)}}\right\} M_l^{\frac{1}{l\binom{N}{l+1}}}$$

对上式进行整理，便得

$$\left[\frac{k!}{\sqrt{k+1}} M_k^{\frac{1}{\binom{N}{k+1}}}\right]^{\frac{1}{k}} \geqslant \left[\frac{l!}{\sqrt{l+1}} M_l^{\frac{1}{\binom{N}{l+1}}}\right]^{\frac{1}{l}} \tag{3}$$

且由(4)中等号成立条件知(3)中等号当且仅当所有的 l 维单形均为正则单形时成立.

特别在(3)中取 $N=n+1$, $k=1$, $l=n$, 便得到Korchmáros不等式[2]

$$\prod_{1<i<j<n+1} a_{ij}^{\frac{2}{n+1}} \geqslant \left(\frac{2^n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} n!\, V \tag{7}$$

其中 $a_{ij}(i, j=1,2,\cdots,n+1)$，$V$ 分别表示单形的棱长与体积

另外，在（3）中取 $N=n+1$, $k=m$, $l=n$，并整理得

$$M_m \geqslant \left(\frac{\sqrt{m+1}}{m!}\right)^{\binom{n+1}{m+1}}\left(\frac{n!}{\sqrt{n+1}}V\right)^{\frac{m}{n}\binom{n+1}{m+1}} = \left(\frac{\sqrt{m+1}}{m!}\right)^{\mu}\left(\frac{n!}{\sqrt{n+1}}V\right)^{\frac{m\mu}{n}} \tag{8}$$

其中 V 为单形 Σ_A 的体积.

引理2[1] 在 n 维单形的内切球半径 r 和体积 V 之间有不等式

$$r \leqslant \left[\frac{n!^2}{n^n(n+1)^{n+1}}\right]^{\frac{1}{2n}} V^{\frac{1}{n}} \tag{9}$$

且当该单形为正则时等号成立.

引理3[3] n 维单形 Σ_A 的棱长 a_s 和外接球半径 R 之间有不等式

$$\sum_{s=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} a_s^2 \leqslant (n+1)^2 R^2 \tag{10}$$

其中等号当且仅当 Σ_A 的重心和外接球球心重合时成立.

引理4 设由 n 维单形 Σ_A 的顶点所作成的 $\binom{n+1}{m+1}$ 个 m 维子单形体积的平方和为 N_m，则有

$$N_1^m \geqslant \frac{(n-m)!\,(m!)^3}{[(n-1)!]^m}[(n+1)!]^{m-1} N_m \qquad (1<m<n), \tag{11}$$

其中等号当且仅当Σ_A关于其重心的惯量椭球是一个球时成立.

证明 由[4]中(1.5)式或[1]中(1)式即得.

定理的证明 由Maclaurin不等式[5]知

$$\left[\frac{P_\lambda}{\binom{\mu}{\lambda}}\right]^{\frac{1}{\lambda}} \geqslant \left[\frac{P_\mu}{\binom{\mu}{\mu}}\right]^{\frac{1}{\mu}}$$

或

$$P_\lambda \geqslant \binom{\mu}{\lambda} M_m^{\frac{2\lambda}{\mu}} \tag{12}$$

利用(8)，有

$$P_\lambda \geqslant \binom{\mu}{\lambda}\left(\frac{\sqrt{m+1}}{m!}\right)^{2\lambda}\left(\frac{n!}{\sqrt{n+1}}V\right)^{\frac{2m\lambda}{n}}$$

再由(9)，所以

$$P_\lambda \geqslant \binom{\mu}{\lambda}\left(\frac{m+1}{m!^2}\right)^{\lambda}[n(n+1)]^{m\lambda} r^{2m\lambda} \tag{13}$$

由于Σ_A的内切球半径r即它的切点单形$\Sigma_{A'}$的外接球半径，故由(10)知

$$N_1' \leqslant (n+1)^2 r^2. \tag{14}$$

(N_m'表示由$\Sigma_{A'}$的顶点所作成的$\binom{n+1}{m+1}$个m维子单形的体积的平方和，$m=1,2,\cdots,n$.)

再次利用Maclaurin不等式[5]

$$\left[\frac{P_\lambda'}{\binom{\mu}{\lambda}}\right]^{\frac{1}{\lambda}} \leqslant \frac{P_1'}{\mu}$$

或

$$P_\lambda' \leqslant \mu^{-\lambda}\binom{\mu}{\lambda}(P_1')^\lambda = \mu^{-\lambda}\binom{\mu}{\lambda}(N_m')^\lambda.$$

将(11)式中的N_1、N_m换成N_1'、N_m'，然后结合上式，可得

$$P_\lambda' \leqslant \binom{\mu}{\lambda}\left[\frac{(m+1)!}{m!^3}\right]^{\lambda}\left[\frac{(n-1)!}{(n+1)!}\right]^{m\lambda}(N_1')^{m\lambda}$$

再由(14)，有

$$P_\lambda' \leqslant \binom{\mu}{\lambda}(n+1)^{2m\lambda}\left[\frac{(m+1)!}{m!^3}\right]^{\lambda}\left[\frac{(n-1)!}{(n+1)!}\right]^{m\lambda} r^{2m\lambda} \tag{15}$$

由(13)、(15)，即得(1)式.

类似于不等式(13)的证法可以证明

$$Q_\lambda \geqslant \binom{\mu}{\lambda}\left(\frac{m+1}{m!^2}\right)^{\frac{\lambda}{2}}[n(n+1)]^{\frac{m\lambda}{2}} r^{m\lambda} \tag{16}$$

注意到 $\dfrac{Q_\lambda'}{\binom{\mu}{\lambda}} \leqslant \left[\dfrac{P_\lambda'}{\binom{\mu}{\lambda}}\right]^{\frac{1}{2}}$ 或

$$Q'_\lambda \leqslant \binom{\mu}{\lambda}^{\frac{1}{2}}(P'_\lambda)^{\frac{1}{2}};$$

故由(15)得

$$Q'_\lambda \leqslant \binom{\mu}{\lambda}(n+1)^{m\lambda}\left[\frac{(m+1)!}{m!^3}\right]^{\frac{\lambda}{2}}\left[\frac{(n-1)!}{(n+1)!}\right]^{\frac{m\lambda}{2}} r^{m\lambda} \tag{17}$$

由(16)、(17)即得(2)式.

由证题过程不难知道，(1)、(2)两式中的等号当且仅当Σ_A为正则单形时成立.

不等式(1)、(2)实质上属于一类几何不等式，仅举一例说明其应用.

在(1)或(2)中取$m=n$，$\lambda=1$，则有

$$V' \leqslant n^{-n} V^{[6]}, \tag{18}$$

其中V, V'分别表示单形Σ_A，$\Sigma_{A'}$的体积.

最后顺便指出，由不等式(10)、(11)、(9)，容易得到:

单形Σ_A的外接球半径R和内切球半径r之间有关系式

$$R \geqslant nr \tag{19}$$

其中等号当且仅当单形为正则时成立.

不等式(19)属已知的结果，有关问题可见文献[7]、[8]、[9].

若单形Σ_A的切点单形$\Sigma_{A'}$的外接球半径和内切球半径分别记为R'和r'，由于$r=R'$，故由(19)可得

$$R' \leqslant \frac{1}{n}R; \tag{20}$$

$$r' \leqslant \frac{1}{n}r, \tag{21}$$

其中等号当且仅当单形Σ_A为正则时成立.

参 考 文 献

[1] 张景中、杨路，中国科学技术大学学报，11(1981)，2：1—8.

[2] Korchmáros, G., Atti Accad. Naz. Lincei Rend. cl. Sci. Fis. Mat. Natur., (8) 56(1974), No.6, 876—879.

[3] Alexander, R. and Stolarsky, K. B., Tran. Am. Math. Soc., 193(1974), 1—31.

[4] 杨路、张景中，数学学报，23(1980)，5：740—749.

[5] Hardy G. H., Littlewood J. E. and pólya, Inequalities, Cambridge, 2nd. ed, 1952.

[6] 毛其吉、左铨如，数学的实践与认识，1987，4：71—75.

[7] Klamkin, M. S., Math. Magazine, 52(1979), 20—22.

[8] Klamkin, M. S., SIAM Review, 27(1985), 4.

[20] 左铨如、毛其吉，科学通报，32(1987)，1：76.

Two Inequalities on Tangent Points Simplex

Su Huaming

(Hefei polytechnical University)

Abstract

Definition Let A_i $(i=1,2,\cdots,n+1)$ be the vertex of a simplex Σ_A in n-dimensional Euclidean space E^n and A'_i be the tangent points which the inscribed sphere of Σ_A is tangent to the side face of Σ_A, then the simplex with the tangent points as vertexes is called the tangent points simplex.

If $m+1$ vertexes are taken from $n+1$ vertexes of an n-dimensional simplex Σ_A $(\Sigma_{A'})$ arbitrarily, then $\mu=\binom{n+1}{m+1}$ sub simplexes may be formed which the volume of these n-dimensional simplexes is $V_h^{(m)}(V_h'^{(m)})$ $[m=1,2,\cdots,n,\ h=1,2,\cdots,\binom{n+1}{m+1}]$ respectively. If the λ-degree elementary symmetrical polynomial of $(V_h^{(m)})^2$, $(V_h'^{(m)})^2$ are P_λ P'_λ and the λ-degree elementary symmetrical polynomial of $V_h^{(m)}$, $V_h'^{(m)}$ are Q_λ, Q'_λ $[\lambda=1,2,\cdots,\binom{n+1}{m+1}]$, then we have the following theorem.

Theorem The invariants of n-dimensional simplex Σ_A and its tangent points simplex which are P_λ, P'_λ and Q_λ, Q'_λ satisfy inequalities

$$P'_\lambda < n^{-2m\lambda} P_\lambda \ , \qquad (1)$$

$$Q'_\lambda < n^{-m\lambda} Q_\lambda \ . \qquad (2)$$

The two equalities in (1) and (2) hold if and only if Σ_A is regular simplex.