第10卷 第2期
1990年5月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXROSITION

Vol. 10 No.2
May. 1990

组合最优化中的布尔方法*

彼得·哈默 刘彦佩

(美国新泽西州立大学运筹学研究中心) (中国科学院应用数学研究所)

布鲁诺·席莫昂

(意大利罗马大学统计概率与应用统计系)

摘 要

本文旨在从NP-完全性理论的角度，以拟布尔函数最优化为典型实例介绍组合最优化问题的一些研究方法和取得的主要进展．并且也提出了一些有待解决的问题和可能的研究途径．

§1 引 言

数学规划乃至一般的最优化问题都有通用的数学模型．然而，组合最优化至今还没有看到有谁给它以一个通用的数学模型．我们只有一个不甚清晰的认识．组合最优化是研究那些伴随有组合结构的一类确定某种最优方案的问题．这种组合结构之通式尚无一个统一的数学描述．当然，我们这里不打算也不可能为上述一些数学分枝划分领地．而只想从本世纪60年代以来得到蓬勃发展的关于判定问题(Decision Problem)的复杂性理论的观点总结和研究组合最优化的问题．

早在1965年，Edmokds曾提出过如果一个算法在最坏的情况下也可以依初始数据量的一个多项式为界的计算量结束，则称这个算法是“好”的算法[9]．或后来人们称的有效算法．那时，只是作为衡量一个算法好或坏的标准．一个问题，如果可以设计一个有效算法求出它的一个解或判定无解，则称之为P-问题．记$\mathscr{P}$为所有P-问题的集合．那么，是否存在一个问题，对于它，不能有任何一个有效算法可求出它的一个解或判定无解？如有，它将是什么样的？至今未能解决．这就是所谓$NP \stackrel{?}{=} P$的问题．

然而，值得庆幸的是于1971年Cook证明了确有一类至今尚未发现有有效算法的问题，一旦它们中之一有有效算法，则此类中的所有问题都有有效算法[7]．此类中的问题就是所谓NP-完全问题．Cook的工作开辟了数学中的一个新的理论，即NP-完全性理论．之后，Karp又发现了一些新的NP-完全问题．到目前为止，已经发现有上千的问题都属于这一类．若记$\mathscr{NPC}$为所有NP-完全问题的集合，则是否在$\mathscr{NPC}$中有一个问题，对于它，或者可以

* 1988年9月19日收到．

找到一个有效算法；或者，可以证明不存在任何有效算法．这就是近代应用数学中提出的一大难题．可以想象，它的意义和难度决不会低于诸如四色问题，Riemann假设和Fermat猜想等这样的著名数学难题．我们这里的问题，实际上就是确定 $\mathcal{NPC} \overset{?}{\subseteq} \mathcal{P}$ 的问题．

值得注意的，Cook的开创性工作是论证了满意性问题属于 NP-完全类 $\mathcal{NPC}$．而这个问题，实际上就是一个解一般的布尔方程的问题．

那么，围绕 NP-完全性理论，有哪些工作是值得做的呢？我们这里列出一些目前人们正在搞的和笔者认为应该着手研究的问题．

第一、对于一个问题，当然，首先需研究它是否有有效算法．如果发现了一个有效算法，自然，已经确定属于 $\mathcal{P}$．如何不通过找有效算法判定一个问题是否属于 $\mathcal{P}$ 目前几乎还是一无所知，因此，如果不能发现有效算法，就研究它是否属于 $\mathcal{NPC}$．这方面是目前人们研究最多的．事实上，在已经发现 $\mathcal{NPC}$ 中有上千个问题的今天，这种研究已变得易于接触了．下一节将给出理论上的缘由．

第二、对于一个已经证明属于 NP-完全的问题．一般而论，想找出一个有效算法从而一举解决 $\mathcal{NPC} \subseteq \mathcal{P}$ 似乎成功的可能性甚小．往往劳而无功．因此，需要探索新的途径．通常是研究在什么条件下这个问题就变成了 P-问题，和这种条件的有效识别．进而，探求这种条件的表征．

第三、论证某 NP-完全问题无有效算法．当然，它的解决同样远非容易．无疑，需要一些新概念的引进与论证方法上的革新，也许和发现第一个 NP-完全问题一样，解一般布尔方程，或者解三次布尔方程是一个可取的剖析对象．

基于这样的原因，我们这里只局限于讨论组合最优化中的布尔方法．看一看在这方面的研究已经和可以达到怎样的深度．有没有和有多大的发展余地．

首先，作为基础，我们扼要介绍 NP-完全性理论．当然，只是着重于算法的研究方面．然后，讨论布尔方程．实际上，在于剖析满意性问题．进而，也是本文的主要部分，讨论二次拟布尔最优化的各个方面．下面，将会看到对于二次情况的研究并不失对一般拟布尔函数的最优化研究的一般性．基本的研究思路如上面的第二所述．本文虽然局限于布尔方法，但其基本思路对于其它 NP-完全类，特别是在组合最优化中的 NP-完全类问题也是适用的．

§2 NP-完全性理论

首先，我们解释这里所研究的问题和算法．

更确切地说，我们讨论的问题是指所谓判定问题（Decision Problem）．其模式由二部分组成：Ⅰ．原始数据；Ⅱ．既定目标．在原始数据中包括了达到既定目标所需的但无多余的全部参数．当然，我们这里只讨论参数数目，即原始数据量为任一有限数的情形．在既定目标中规定了对于解答的要求．当然，这些要求必需是确定的．

所谓算法就是从任何给定的原始数据出发，可以通过算术的、逻辑的运算以及转移、比较等总能达到终止状态的一种一步一步地进行的过程．若记问题的原始数据量为 n，所谓一个算法的复杂度，记为 $O(f(n))$，即指有这样的一个仅依赖原始数据量 n 的函数 $f(n)$ 使得不管用什么原始数据，这个算法所需的计算时间均不超过 $f(n)$．如果 $f(n)$ 是 n 的一个多项式，则称之为多项式型算法，除此以外统称为指数型算法．在文献中，多项式型的算法也称有效

算法．指数型算法也称无效算法．因为，我们总是在原始数据最不利的情况下估计$f(n)$的．在实地计算时，不一定多项式型算法总比指数型算法好．也不一定对于任何正整数$k>l$，$O(n^l)$的算法总比$O(n^k)$的算法好．注意，这时的所谓好是指所用的计算时间短．所有那些有多项式算法的问题被称为是P-问题．用$\mathscr{P}$表示所有P-问题组成的集合．

一个问题，自然指如上所述的判定问题，如果可以建立一个分二个阶段的算法：选取阶段和检验阶段使得对于任一选取的结构（或者说方案）由原始数据出发能够用选取结构大小的某多项式为界的计算量在检验阶段中确定这个结构是或否达到了既定的目标，则称之为NP-问题．记$\mathscr{N}\mathscr{P}$为所有NP-问题组成的集合．

定理2.1　$\mathscr{P}\subseteq\mathscr{N}\mathscr{P}$．

证明　由定义可直接导出．■

定理2.2　对于任一$P\in\mathscr{N}\mathscr{P}$，都存在一个原始数据量$n$的多项式$p(n)$使得$P$有一个复杂度为$O(2^{p(n)})$的算法．

证明　若将原始数据用二进制表示．设其总长度为K．容易看出，K是n的一个多项式，记$K=r(n)$．又，对于每一选取的S可以通过多项式$q(n)$步确定S是或否达到了既定目标．因为每一步有K种可能的选择，选取S的方式至多$K^{q(n)}$种．从而，至多$q(n)\cdot K^{q(n)}=2^{\log_2(q(n)K^{q(n)})}$步便可确定$P$是否有解．即，$O(2^{p(n)})$．其中，多项式$p(n)\geqslant\log_2(q(n)K^{q(n)})$．只要取$p(n)=q(n)(1+K)=q(n)(1+r(n))$即是．■

两个问题$P_1,P_2\in\mathscr{N}\mathscr{P}$，如果存在一多项式型算法，可以将$P_1$变到$P_2$，则记$P_1\succ P_2$．容易验证，$\succ$是一个序关系．如果$P_1\succ P_2$和$P_2\succ P_1$，则称$P_1$与$P_2$多项式等价，记为$P_1\infty P_2$．

引理2.1　如果$P_1\succ P_2$，则

$$P_2\in\mathscr{P}\Rightarrow P_1\in\mathscr{P}. \tag{2.1}$$

证明　因为假若通过$O(p_1(n_2))$可得P_2的有解与否和通过$O(p_2(n_1))$可将P_1变到P_2，则通过$O(p_1(n_2)+p_2(n_1))$即可确定P_1有解与否．然，$n_2=O(p_3(n_1))$，则$O(p_1(n_2)+p_2(n_1))=O(p_1(p_3(n_1))+p_2(n_1))=O(p(n_1))$．■

一个问题$P\in\mathscr{N}\mathscr{P}$，如果对于任何其它的问题$P'\in\mathscr{N}\mathscr{P}$均有$P'\succ P$，则称$P$为$NP$-完全的．由这个定义和引理2.1．可以看出，$NP$-完全的问题是最困难的问题．因为只要有单独一个$NP$-完全问题被证明是属于$\mathscr{P}$的．那么，所有$NP$-完全问题都属于$\mathscr{P}$．即，$\mathscr{N}\mathscr{P}\mathscr{C}\subseteq\mathscr{P}$．其中$\mathscr{N}\mathscr{P}\mathscr{C}$为所有$NP$-完全问题组成的集合．

引理2.2　若$P_1,P_2\in\mathscr{N}\mathscr{P}$且$P_1\in\mathscr{N}\mathscr{P}\mathscr{C}$，则

$$P_1\succ P_2\Rightarrow P_2\in\mathscr{N}\mathscr{P}\mathscr{C}. \tag{2.2}$$

证明　由于$P_2\in\mathscr{N}\mathscr{P}$，只需证对任何$P\in\mathscr{N}\mathscr{P}$均有$P\succ P_2$．然，由于$P_1\in\mathscr{N}\mathscr{P}\mathscr{C}$，有对任何$P\in\mathscr{N}\mathscr{P}$，$P\succ P_1$．又，$P_1\succ P_2$．由传递性，即得欲证．■

由此可见，对于$P\in\mathscr{N}\mathscr{P}$，若要证$P\in\mathscr{N}\mathscr{P}\mathscr{C}$，只需在$\mathscr{N}\mathscr{P}\mathscr{C}$中选出单独一个$P_0$使得可以证明$P_0\succ P$即可．这里，最重要的问题是证明$\mathscr{N}\mathscr{B}\mathscr{C}$非空，才使上面的讨论有意义．这个奠基性的工作是由Cook于1971年做出的[7]．

为了陈述Cook定理，先介绍满意性问题．设$x_1,x_2,\cdots,x_n$表示一些事件．每一事件只有两个状态：产生或称为"**真**"；不产生或称为"**伪**"．对于任一事件x_i，$\overline{x_i}$为真当且仅当x_i为伪．x_i和$\overline{x_i}$统称为**字**，用$\widehat{x_i}$表之．一个由**字**组成的集合，如果其中至少有一**字**取**真**时，则这

个集合取真；否则，取伪．称这样的字的一个集合为语．一个由语组成的集合，如果组成它的每个语取真时它才取真；否则，取伪．称这样的语的一个集合为句．所谓满意性问题，记为Sat，指：Ⅰ．原始数据由事件的一个集合X和其上的一个句C组成；Ⅱ．既定目标为确定X中事件的一组值使得C取真，即C是满意的．

定理2.3（Cook）　Sat$\in\mathcal{NPC}$．

因证明方法与本文无关，故从略．

基于引理2.2，我们可将已经证明属于$\mathcal{NPC}$的问题用一个以满意性问题为根的外向树表示。其上，问题P有一个箭头指向问题Q，指通过证明$P\succ Q$发现$Q\in\mathcal{NPC}$．到目前为止，这个树上已有上千个节点(即问题)了．下面，我们仅划出其上与本文有关的部分．见图2.1．其中，

Sat：满意性问题(§2)；

3-Sat：3—满意性问题，即句中每语至多含3个字[15]；

Bool：解布尔方程问题(§3)；

3-Bool：解三次布尔方程问题(§3)；

VC：图的节点覆盖(边的横交)问题[15]；

MIS：求图的最大独立集问题[15]；

PB：解拟布尔方程问题(§4)；

Min PB：求拟布尔函数的最小值(§4)；

MaxPB：求拟布尔函数的最大值(§4)；

Max2-PB：求二次拟布尔函数的最大值(§4)；

WIBis：求蛛网图上的最大权独立集(§6)；

RQP：判别一个图是否为二次本原图(§6)；

RCSS：判别一个二次图的边集是否可用星和四边形所覆盖使得它们中任意二个至多有一个公共节点(§6)；

2-MWI：在二次图上求最大权独立集(§6)；

WI：在图上求最大权独立集(§6)；

WIS_f：在SAM-图上求最大权独

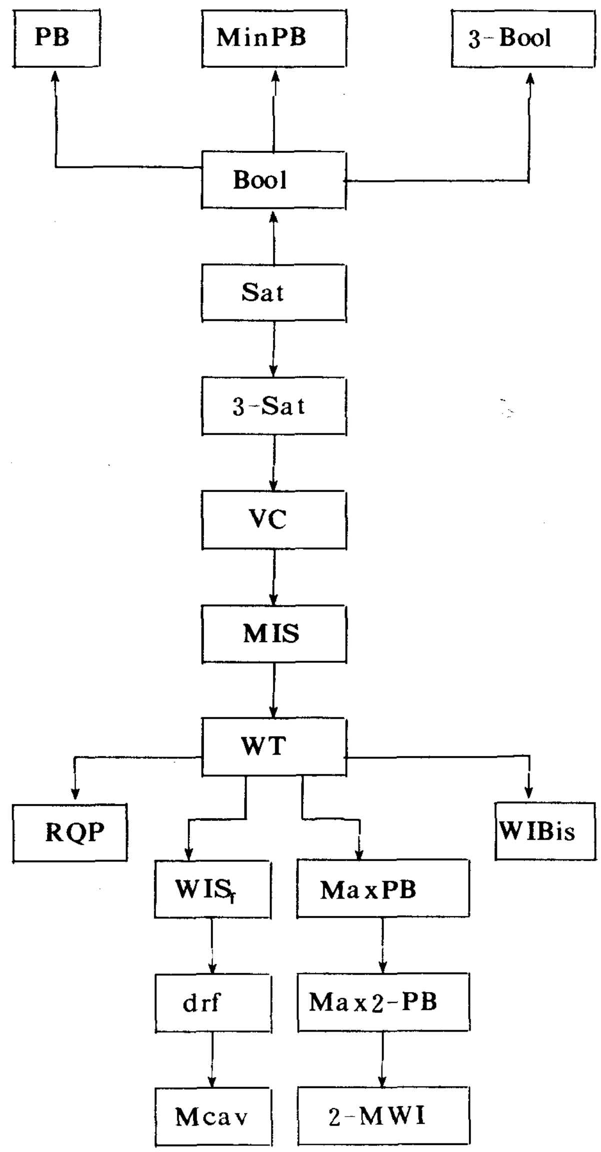

图2.1

立集(§12);

drf：求离散Rhys形式的解(§12);

Mcav：求一个二次拟布尔函数的最大凹包(§12).

事实上，$\mathscr{NPC}$除组合学、图论、网络设计和组合最优化外，还跨入了代数学、数论、集合论、数理逻辑和自动机理论等分枝．关于从一个问题多项式地变换到另一个问题的方法可参见Garey和Johnson的书[15].

§3 布尔方程

令 $B=\{0,1\}$，在 B 上建立二元运算：

$$\begin{cases} \text{并 } \vee: & x\vee y=\max\{x,y\}; \\ \text{交 } \wedge: & x\wedge y=\min\{x,y\}; \\ \text{补 } -: & \overline{x}=1-x. \end{cases} \tag{3.1}$$

由此可得一个布尔代数．令 $x_i\in B$, $i=1,2,\cdots,n$, 为**布尔变量**．所谓**字**，即指 x_i 或 $\overline{x_i}$．**项**为有限个互不相同的字的交．由于这里之交与算术上的乘法一致，故总是采用通常的方式略去符号 $\wedge$．又，由于 $xx=x$ 和 $x\overline{x}=0$，任何有限个字之交均可化为一项．一个**布尔表达式**即指有限项之并．因为任何一个由(3.1)所给出的运算在 B 上形成的式子均可化为有限项之并的形式，这样定义布尔表达式不失一般性．一个**布尔函数**，即一个映象 ψ: $B^n\to B$ 使得 $a\in B^n$ 映到 $\psi(a)\in B$ 或记 $a\mapsto\psi(a)$．容易证明，每一个布尔函数均可写成一个布尔表达式．

如果一个布尔函数 ψ 中的任何二项均不是由相同的变量或其补所组成，则称 ψ 是**本原的**．即，在本原函数中，如果有一项为 xy，则不可能再有 $\overline{x}y$, $x\overline{y}$, $\overline{x}\overline{y}$ 等作为它的项．当然，xy 本身不重复出现作为一项．如果在 ψ 中不存在如 xC 和 $\overline{x}C$ 这样形式的二项，并且所有项全是不同的，则称 ψ 是**正规的**．如果每一项都至少有一个不带补的变量，则称它是**纯的**．若每一项既有不带补的也有带补的变量，则称为**混合的**．

对于一个布尔表达式 ψ，一个单项式 I(不一定是 ψ 的一项)，如果 $I\leqslant\psi$，即 $I=1\Rightarrow\psi=1$，则称 I 为 ψ 的一个**隐子**．如果对于隐子 I，不再有任何隐子 $J\neq I$ 使得 $I<J\leqslant\psi$，则称 I 为**素隐子**．如果求出了 ψ 的所有素隐子，则 ψ 还可表示为所有素隐子之并的形式．

为了介绍求布尔表达式的所有素隐子的一种方法，我们要先引进二个运算．

协调运算：若在 ψ 中有二项如 xC 和 $\overline{x}D$，使得在 C 中不存在一个变量在 D 中以补的形式出现，则将 CD 做为一项并到 ψ 上．

吸收运算：若在 ψ 中有二项 C 和 D，使得在 C 中出现的变量或其补在 D 中也出现，则将 D 从 ψ 中去掉．

定理3.1 对任一布尔表达式 ψ，通过反复使用协调运算和吸收运算直到不能进行为止可得 ψ 的所有素隐子之并的形式．

证明 可参见Quine(1955)[33].

上面定理中所述的确定所有素隐子的方法，在文献中常称为**协调法**．

一般而论，用协调法所建立的求所有素隐子的算法不是有效的．但，当 ψ 是二次的时，即每项至多含二个字的情形确是有效的．这时，其复杂度为 $O(n^2)$，n 为 ψ 中所含字的数目．

对于一个布尔表达式 ψ，方程 $\psi=0$ 是**相容的**，即指存在 $a\in B^n$，使得 $\psi(a)=0$.这样的 a 称

为此方程的一个解.

记 $Bool$ 为确定布尔方程

$$\bigvee_{j=1}^{m}\bigwedge_{i\in J_j}\widehat{x_i}=0 \tag{3.2}$$

是否相容的问题. 其中, $\widehat{x_i}=x_i$, 或 $\overline{x_i}$, $i=1,\cdots,n$.

定理3.2 $Bool\in\mathcal{NPC}$.

证明 由于(3.2)和如下方程等价

$$\bigwedge_{j=1}^{m}\bigvee_{i\in J_j}\overline{\widehat{x_i}}=1. \tag{3.3}$$

然, 确定(3.3)是否相容即满意性问题. 由定理2.3(Cook), 定理得证. ■

我们自然会注意到: 判定一个布尔方程 $\psi=0$ 是否相容, 实际上, 即判定常数1是否为 ψ 的一个素隐子. 由上面的讨论可知: 当 ψ 为二次的时候, 用协调方法可以判定 $\psi=0$ 是否有解. 其复杂度为 $O(n^2)$). 进而要问: 如果 ψ 是三次的怎么样? 非常遗憾, 这时用协调法求素隐子却变得不有效了。其原因在于通过协调运算不能保证所得的项皆不超过三次。记3-Bool为确定一个三次布尔方程是否相容的问题.

定理3.3 $3\text{-}Bool\in\mathcal{NPC}$.

证明 首先, 容易验证, $3\text{-}Bool\in\mathcal{NP}$. 然后, 依 § 2 所讨论的理论, 由定理3.2, 只要能证明 $Bool\succ 3\text{-}Bool$ 即是.

令 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为(3.2)中出现的所有变量的集合. 和记

$$T_j=\bigwedge_{i\in J_j}\widehat{x_i}$$

为(3.2)中之一项. 现在, 我们引进一个变换 $\mathcal{S}$ 使得 $\mathcal{S}(T_j)=T_j'$. 其中, T_j' 依如下方式确定:

$$T_j'=\begin{cases}\widehat{x_{i_1}}y_j^{(1)}y_j^{(2)}\vee\widehat{x_{i_1}}y_j^{(1)}\bar{y}_j^{(2)}\vee\widehat{x_{i_1}}\bar{y}_j^{(1)}y_j^{(2)}\vee\widehat{x_{i_1}}\bar{y}_j^{(1)}\bar{y}_j^{(2)}, & \\ & \text{当 } |J_j|=|\{i_1\}|=1\,; \\ \widehat{x_{i_1}}\widehat{x_{i_2}}y_j\vee\widehat{x_{i_1}}\widehat{x_{i_2}}\overline{y_j}, & \text{当 } |J_j|=|\{i_1,i_2\}|=2; \\ \widehat{x_{i_1}}\widehat{x_{i_2}}\widehat{x_{i_3}}, & \text{当 } |J_j|=|\{i_1,i_2,i_3\}|=3; \\ \widehat{x_{i_1}}y_j^{(1)}y_j^{(2)}\vee(\bigvee_{l=2}^{k-2}\widehat{x_{i_l}}\bar{y}_j^{(l-2)}y_j^{(l-1)})\vee\widehat{x_{i_{k-1}}}\widehat{x_{i_k}}\bar{y}_j^{(k-3)}, & \\ & \text{当 } |J_j|=|\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}|=k\geqslant 4.\end{cases}$$

可以验证, (3.2)的相容性与下面的布尔方程的相容性等价:

$$\bigvee_{j=1}^{m}\mathcal{S}\left(\bigwedge_{i\in J_j}\widehat{x_i}\right)=0.$$

实际上, 当 $|J_j|\leqslant 3$ 时, $\mathcal{S}(T_j)=T_j'$ 是恒等变换. 只需讨论 $|J_j|\geqslant 4$ 的情况. 这时, 我们总可以证明: $T_j=0$ 相容, 当且仅当 $T_j'=0$ 相容.

进而, 由于每一项中所含的字数至多为 n. 从而, 这个变换是多项式的. ■

如果方程(3.2)左边的布尔表达式是纯的, 则称为**纯布尔方程**. 对于纯布尔方程, 容易验证, $a=(0,0,\cdots,0)$ 即为一个解. 其中有 n 个0.另外, 我们可以看出: 若将一个方程中的

一个变量与它的补互换，称为**反换**，不会影响它的相容性．

定理3.4 布尔方程(3.2)是相容的，当且仅当存在变量的一个集合S使得通过S中的变量作反换可化为纯布尔方程．

证明 实际上，设$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$为方程(3.2)的一个解．则，取$S=\{x_i|a_i=1,1\leqslant i\leqslant n\}$即为所求． ■

那么，可否建立一个有效的算法，使得通过变量的反换判定一个布尔方程的相容性．由前面的定理3.2和定理3.3可以预料，即使在方程中每项皆至多含三个字，或者说三次布尔方程也是非常困难的．

然而，对于二次布尔方程却有如下的结果．

定理3.5 二次布尔方程可以通过变量的反换有效地判定它的相容性．

证明 首先，伴随二次布尔方程$\psi=0$可构造一个图$G_\psi=(X\cup\overline{X},E_\psi)$．其中，$X=\{x_1 x_2,\cdots,x_n\}$为$\psi$中出现的变量的集合，$\overline{X}=\{\overline{x_1},\overline{x_2},\cdots,\overline{x_n}\}$．$E_\psi=\{(x_i,\overline{x}_i)|1\leqslant i\leqslant n\}\cup\{(\widehat{x}_i,\widehat{x}_j)|\widehat{x}_i\widehat{x}_j$为$\psi$的一项，$1\leqslant i,j\leqslant n\}$．可以验证，$\psi=0$相容，当且仅当$G$上存在一个独立集$I$使得对于$i=1,2,\cdots,n$，均有$|I\cap\{x_i,\overline{x_i}\}|=1$，实际上，这就是所谓König-Egewary性质，或简记**K-E**性质．即，边的独立数等于节点的独立数．也可以说，最大对集中边的数目等于最小横交集中节点的数目．Gavril (1977)给出了在最大对集已知的条件下确定一个图是否满足K-E性质的$O(m)$算法．其中，m为边数．

由此，当求得独立集I之后，只需将I中的那些$\overline{x_i}$作反换，即可得到$\psi=0$的纯布尔表示． ■

由定理3.5，即可得

定理3.6 $2\text{-}Bool\in\mathscr{P}$．

上面所用之记号$2\text{-}Bool$表示解二次布尔方程问题．

至此，我们可以特别指出，对于布尔方程的研究，从NP-完全性理论的角度，只要研究三次布尔方程这一简单的情况就够了．

§4 拟 布 尔 函 数

所谓拟布尔函数，指这样的一个映象$f:B^m\to R$．其中，$B^n=\underbrace{B\times B\times\cdots\times B}_{n个}$，$B=\{0,1\}$，和$R$为实数集，因为在$B^n$中共有$2^n$个点，故$f$只有$2^n$个值．当然，这$2^n$个实数值中可以有相等的．

定理4.1 任何拟布尔函数f均可表成如下的标准形式：

$$f=\sum_{T\in\mathscr{F}}a_T\prod_{j\in T}\widehat{x}_j\ . \tag{4.1}$$

证明 将B^n中的2^n个点用n位的二进制数表示．设$A_f=\{a\in B^n|f(a)\neq0\}$．对于每一个$a\in A_f$，令$I_a=\{i|a_i=1,i=1,2,\cdots,n\}$．注意到

$$\prod_{i\in I_a}x_i\prod_{j\in\overline{I}_a}\overline{x}_j=1\Leftrightarrow x=a. \tag{4.2}$$

其中，$\overline{I}_a=N-I_a$，$N=\{1,2,\cdots,n\}$．从而，可得

$$f=\sum_{a\in A_f} f(a)\prod_{i\in I_a} x_i \prod_{j\in \overline{I}_a} \overline{x}_j \ .$$

即为(4.1)之形式. ■

设τ为一项，即有限个互不相同的字之交，自然，也是积. b是一个实数. 则，$b\tau$被称为**单项式**. 注意，$\prod_{i\in\phi}\widehat{x}_i=1$，$b$为它的系数. 一个拟布尔函数$\psi$被称为是**正形式**，如果

$$\psi=a_1\tau_1+a_2\tau_2+\cdots+a_m\tau_m \tag{4.3}$$

且$a_i>0$，$i=1,2,\cdots,m$. 如果一个拟布尔函数(4.1)中有常数项，则称之为**非齐次的**；否则，**齐次的**. 对于布尔表达式的本原、正规、纯以及混合等情况均可相应地用到拟布尔函数.

对于如(4.3)的拟布尔函数，其相应的布尔表达式

$$\widetilde{\psi}=\tau_1\vee\tau_2\vee\cdots\vee\tau_m \tag{4.4}$$

称为是ψ的**布尔支架**. 可以证明，对于正形式$\psi(x)$，$\min\limits_{x\in B^n}\psi(x)=0$，当且仅当其布尔支架$\widetilde{\psi}(x)=0$是相容的.

定理4.2 任一拟布尔函数$f(x)$均可表示成如下的形式：

$$f(x)=c+\psi(x),\qquad x\in B^n \tag{4.5}$$

其中，c是一个常数，$\psi(x)$是一个齐次正形式.

证明 只要注意到恒等式

$$-\prod_{i=1}^{p}x_i=\overline{x}_1\prod_{i=2}^{p}x_i+\overline{x}_2\prod_{i=3}^{p}x_i+\cdots+\overline{x}_{p-1}x_p+\overline{x}_p-1. \tag{4.6}$$

将$f(x)$中系数为负的项用(4.6)式的右边代替，即可得. ■

由定理4.2中的一个常数c和一个正形式ψ所成的对(c,ψ)被称为$f(x)$的一个**正表示**. 容易看出，拟布尔函数的正表示一般是不唯一的.

对于一个拟布尔函数$f(x)$，(c,ψ)为它的正表示，$\widetilde{\psi}$为ψ的布尔支架. 我们可以构造一个节点带权的图G_ψ与之关联. G_ψ的节点就是$\widetilde{\psi}$中的项. 二个节点相邻，当且仅当它们对应的二项有一个公共的字且它们在二项中以互补的形式出现. 节点的权就是此节点相应项在ψ中的系数. 称G_ψ为f的一个**对抗图**. 这样，对于任一拟布尔函数f的一个正表示(c,ψ)，有唯一的一个对抗图G_ψ与之对应. 反之，对任何一个节点带正权的图，可以找到一个拟布尔函数和它的一个正表示，使得以此图为对抗图. 称这里的正表示中的正形式为这个图的一个**代码**. 也易看出，一个图的代码一般不是唯一的.

由定理4.2，确定一个拟布尔函数f的极值可转化为求它的一个正形式ψ的极值. 关于确定$\min\limits_{x\in B^n}\psi(x)$，即使判断是否$\min\limits_{x\in B^n}\psi(x)=0$，如前所述，也相当求一个布尔方程的解的问题.

记 $\min PB$为确定一个拟布尔函数的最小值的问题，则，有

定理4.3 $\min PB\in\mathcal{NPC}$.

证明 由定理3.2，即得. ■

关于求$\max\limits_{x\in B^n}\psi(x)$，可以验证，对于$a\in B^n$，$\psi(a)$中所有非零项在对抗图中相应的节点形成一个独立集. 在G_ψ上，记$\mathcal{I}$为所有独立集组成的集合. 对于$I\in\mathcal{I}$，记

$$\psi(I)=\sum_{v\in I}\frac{\partial\psi}{\partial v} \tag{4.7}$$

称为 I 的权．其中 $\frac{\partial\psi}{\partial v}$ 表示 ψ 中相应 v 的项的系数．从而，有

$$\max_{x\in B^n}\psi(x)=\max_{I\in\mathcal{I}}\psi(I). \tag{4.8}$$

即，在一个节点带权的图上确定最大带权独立集的问题．将之简记为 WI．

定理4.4 记 $\max PB$ 为确定一个拟布尔函数的最大值的问题．则，有

$$\max PB\in\mathcal{NPC}. \tag{4.9}$$

证明 首先，易验证 $\max PB\in\mathcal{NP}$．又，由上面的讨论知：$WI\succ\max PB$．从而，由图2.1上所示 $WI\in\mathcal{NPC}$，即得． ■

对于任何一个拟布尔函数 $f(x)$，确定 $\max f(x), x\in B^n$，的问题可以多项式地化为确定 $\max g(x)$，$x\in B^n$，$g(x)$ 为一个二次拟布尔函数．实际上，我们可以逐个地将 $f(x)$ 中的超过二次的项内的 $\widehat{x_i}\widehat{x_j}$ 用一个新的变量 $y_{ij}\in B$ 代替．并同时引进一个充分大的常数 M_{ij} 使得在达到最大值的解中满足 $y_{ij}=\widehat{x_i}\widehat{x_j}$．就是说，有

$$\max_{x\in B^n}f(x)\Leftrightarrow\max_{\substack{x\in B^n\\ y_{ij}\in B}}(f(x)+M_{ij}(y_{ij}-\widehat{x_i}\widehat{x_j})). \tag{4.10}$$

每用上述的等价变换一次，至少使其中一项减低一次．从而，反复用之，总可达到二次拟布尔函数．而且，易验证，这一变换过程是多项式的．

定理4.5 记 $\max 2\text{-}PB$ 为求一个二次拟布尔函数的最大值的问题．则，有

$$\max 2\text{-}PB\in\mathcal{NPC}. \tag{4.11}$$

证明 当然，也易验证，$\max 2\text{-}PB\in\mathcal{NP}$．且，由上面讨论知 $\max PB\succ\max 2\text{-}PB$．和由定理4.4，即得欲证． ■

至此，我们已经可以看到要想研究确定一般拟布尔函数的最大值，从 NP-完全性理论的角度，只要研究确定二次拟布尔函数的最大值就够了．

§5 二 次 0-1 最 优 化

所谓二次0-1最优化，就是求一个二次拟布尔函数的最大值（或最小值）：

$$z=\max_{x\in B^n}f(x) \tag{5.1}$$

其中，$f(x)$ 是一个二次拟布尔函数．即，

$$f(x)=x^TQx=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_{ij}x_ix_j. \tag{5.2}$$

由于 $x_ix_j=x_jx_i$，总可取 Q 为一个上三角形 $n\times n$ 方阵．即，$q_{ij}=0, i>j$．又，由 $x_i^2=x_i$，$x_i\in B$．q_{ii} 为 $f(x)$ 中线性项的系数．

值得注意的，文献中很多流行的组合最优化的问题本身就是二次0-1最优化问题． 本节旨在给出一些有代表性的例子．当然，从理论上，任何 $\mathcal{NP}$ 类中的问题均可多项式地化到0-1最优化，特别是二次0-1最优化问题．因为上一节已经证明这个问题属于 $\mathcal{NPC}$．

例1 最小上圈问题，记之为$\min C$．所谓图G的一个上圈，记为U，是指存在V上的一个2－剖分 $X\cup Y=V$，$X\cap Y=\varnothing$ 使得

$$U=\{(u,v)|u\in X, v\in Y\}. \tag{5.3}$$

在G的边$e=(u,v)$上分配以一个容量$c(e)$．一个上圈U的容量，即指

$$c(U)=\sum_{(u,v)\in\mathscr{U}} c(u,v). \tag{5.4}$$

所谓最小上圈问题，就是求

$$\min_{U\in\mathscr{U}} c(U) \tag{5.5}$$

其中，$\mathscr{U}$表示G的所有上圈组成的集合．

若对每个节点v，引进一个变量$x_v\in B$，$x_v=0$，或1分别代表v在X中或Y中．则，这个问题可写为

$$\min_{x\in B^n}\sum_{u\in V}\sum_{v\in V} c(u,v)\overline{x}_u x_v. \tag{5.6}$$

如果所有容量皆非负，最小上圈问题属于$\mathscr{P}$．因为这时相当求最大流的问题．否则，一般而论，属于$\mathscr{NPC}$[15]．

例2 模2规划($M2$-P)．对于给定的图$G=(V,E)$，在边上赋有权$w(u,v)\in B$．在每个节点v处引进一个变量$x_v\in B$．而且，在边上还有一个补偿量$c(e), e\in E$．对于x的一组取值，如果在一边上$w(u,v)\neq x_u+x_v(\mathrm{mod}2)$，$(u,v)\in E$，则需要付出补偿$c(u,v)$．要求取这样一组$x$的值使得在所有边上付出补偿之总和为最小．实际上，这个问题是如下的求二次拟布尔函数最小值的问题：

$$\min_{x\in B^n}\Big(\sum_{(u,v)\in\mathscr{E}_0} c(u,v)(x_u\overline{x}_v+\overline{x}_u x_v)+\sum_{(u,v)\in\mathscr{E}_1} c(u,v)(x_u x_v+\overline{x}_u\overline{x}_v)\Big) \tag{5.7}$$

其中，$\mathscr{E}_i=\{(u,v)\in E|w(u,v)=i\}$，$i=0,1$．

对于(5.7)，判定0是否为最小值的问题确已知为属于$\mathscr{P}$[28]．

如果取所有$c(e)=1, e\in E$，则上述问题等价于平衡符号图问题(BSG)．所谓符号图，指一个图G的每一条边都带一个符号："＋"，或"－"．一个符号图称为是平衡的，指存在对节点赋以符号的方式使得任何一边的符号等于它二端符号之积．当然，不是任何符号图都是平衡的．平衡符号图问题在于确定最少的边使得将这些边从图G中去掉所得的图是平衡的．若将"＋"和"－"用一个布尔量代替，即可看出，此乃模2则划的一种特殊情形．

例3 最大2－满意性问题($M2$-Sat)．如§2中所述，在满意性问题(Sat)中，若每个语仅含二个字，则称为2－满意性问题．由定理3.6，等价地，可知它是属于$\mathscr{P}$．所谓最大2－满意问题，即在一句中取出最少的语使得从此句中将它们去掉所得之句是满意的．若用一个布尔变量代表一个字，取值0意为"真"；否则，"伪"．记$\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_m$为组成一句的语．且它们都是由二个变量组成的项，则最大2－满意问题，实际上，即确定

$$\min_{x\in B^n}\sum_{i=1}^m \tau_i. \tag{5.8}$$

注意，这时以0为真，和τ_i全是项且它们全是二次的．因此，(5.8)是二次拟布尔函数的最小值问题．

下面，再举几个0－1规划，即带约束的最优化的例子．

例 4 在二次布尔方程约束下的线性0-1规划．即，

$$\max_{\substack{\varphi(x)=0\\ x\in B^n}} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i . \tag{5.9}$$

其中 $\varphi(x)=\tau_1\vee\tau_2\vee\cdots\vee\tau_m$ 为二次布尔表达式．

引进一个足够大的常数M，即可将它化为与它等价的二次0-1最优化的问题：

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i - M\left(\sum_{j=1}^{m} \tau_j\right) . \tag{5.10}$$

在一个节点带权图上，求最大权独立集问题就是(5.9)的一个实例．令 $G=(V, E)$．对于$v\in V$，有一个实数与之对应，c_v作为权．则，求最大权独立集问题，有形式

$$\max_{\substack{x_u+x_v\leqslant 1,\ x\in B^n\\ (u,v)\in E}} \sum_{v\in V} c_v x_v . \tag{5.11}$$

其中x是$n=|V|$维的布尔向量与节点关联．由于$x_u+x_v\leqslant 1$与$x_u x_v=0$等价 故，即可得到(5.9)之形式．

例 5 线性0-1规划．其标准型为

$$\max_{\substack{Ax=b\\ x\in B^n}} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{5.12}$$

我们仍可用引进一个足够大的常数M的方法而得到如下的等价二次0-1最优化问题：

$$\max_{x\in B^n} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i - M(Ax-b)^T(Ax-b) . \tag{5.13}$$

集合剖分问题就是这种问题的一个实例．这时，$b=(1,1,\cdots,1)$，A是一个0-1矩阵．其中的元素$a_{ij}=1$表示在第j个子集中有集合中的第i个元素；0,否则．

当然，指派问题(assignment)也是一个实例．

例 6 线性约束的二次0-1规划，形如

$$\max_{\substack{Ax=b\\ x\in B^n}} x^TQx . \tag{5.14}$$

同样的处理方法，可将它化为二次0-1最优化的等价形式

$$\max_{x\in B^n} x^TQx - M(Ax-b)^T(Ax-b) . \tag{5.15}$$

其中，M亦充分大的常数．

确定一个图的色数问题就是它的一个实例．令图$G=(V, E)$，且可用p种不同的颜色着染其节点使相邻的节点具有不同的颜色．这样，确定G上的色数的问题即可表述为

$$\min_{\substack{\sum_{k=1}^{p} x_{vk}=1\\ x_{vk}\in B\\ v\in V}} \sum_{k=1}^{p} \sum_{(u,v)\in E} x_{uk} x_{vk} . \tag{5.16}$$

可见，是(5.14)的一种特殊情形．

§6　二　次　图

在§4中，已经看到一般拟布尔最优化等价于在对抗图上求最大权独立集．因为任何一个图均可看作为某拟布尔函数的对抗图．因此，相当在一般的图上求最大权独立集（WI）．而且，在同一节中，还将一般拟布尔最优化归结为二次拟布尔最优化．然而，对于二次拟布尔函数，则不是任何的图均可视为其对抗图．例如，K_n，$n\geqslant 4$，即至少四个节点的完备图，皆非任何二次拟布尔函数的对抗图．

一个图，如果存在一个二次拟布尔函数以它为对抗图，则称这个图为**二次的**．

定理6.1　在二次图上求最大权独立集的问题，记为$2\text{-}MWI$，是NP-完全的．即，

$$2\text{-}MWI\in\mathcal{NPC}. \tag{6.1}$$

证明　首先，容易看出，$2\text{-}MWI\in\mathcal{NP}$．又，从前面的讨论可知$\max 2\text{-}PB\succ 2\text{-}MWI$．故，由定理4.5，即得．■

在一个二次拟布尔函数中，如果一个变量仅以一种形式出现，即或全为补，或全非补，则称这个变量是**原形的**．

设a为某个对抗图的一个二次代码．x是a中的一个变量，如果x，$\overline{x}$分别在二项τ，τ'中出现，则它的对抗图中连与此二项相应的二节点的边为具有**颜色x**．可见，若x在a中是原形的，则在它的对抗图中无x色的边．而且，容易验证，在二次图中，每一种颜色的边所导出的子图都是完备二分图(或称完备偶图)．并且，每个节点至多与二种颜色的边关联．

定理6.2　一个图G是二次的，当且仅当它的边集E可以被$E_1,E_2,\cdots,E_k$所覆盖，即$E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_k=E$，使得$G$的任何一个节点$v$的所有关联边的集合$E_v$至多与$E_i$，$i=1,2,\cdots,k$，中二个有公共边和$E_i$在$G$上的导出子图$G[E_i]$全是完备二分图．

证明　必要性．容易验证．

充分性．可通过直接构造出一个二次代码完成．仅以$k=2$为例．$k>2$可以类推．

设$G[E_1]=(X_1,Y_1;E_1)$，$G[E_2]=(X_2,Y_2;E_2)$是覆盖G的二个完备二分图．记x_1在X_1中节点所代表的项中出现，则$\overline{x_1}$必在Y_1中节点所代表的项中出现．同样地，记x_2和$\overline{x_2}$分别在X_2,Y_2中节点所代表的项中出现．由此，容易验证，

$$\begin{aligned}a=&\sum_{v\in X_1\cap X_2}x_1x_2+\sum_{v\in X_1\cap Y_2}x_1\overline{x_2}+\sum_{v\in X_1-X_2-Y_2}x_1z_1\\&+\sum_{v\in Y_1\cap X_2}\overline{x_1}x_2+\sum_{v\in Y_1\cap Y_2}\overline{x_1}\,\overline{x_2}+\sum_{v\in Y_1-X_2-Y_2}\overline{x_1}z_2\\&+\sum_{v\in X_2-X_1-Y_1}x_2z_3+\sum_{v\in Y_2-X_1-Y_1}\overline{x_2}z_4\end{aligned}$$

就是G的一个二次代码．其中z_1,z_2,z_3,z_4为与$x_1,\overline{x_1},\overline{x_2},x_2$不同的另外四个布尔变量．当然，它们之中没有任何二个是互补的．■

如果一个二次图中的所有同一色的边所导出的子图皆星图，即$K_{1,l}$，则称之为**蛛网图**．

引理6.1　一个图$G=(V,E)$是蛛网图，当且仅当$G-A$的每个连通片至多含有一个圈．其中，A为G中所有次不超过2的节点的集合．

证明　首先，容易看出，次为1或2的节点对于这里所讨论的问题是非本质的．以及，充分性是不难验证的．因此，只证必要性．

由于蛛网图中所有次大于 2 的每个节点都必需是覆盖它的一个星图的中心节点，我们可以将$G-A$上的边给以定向使得在每个星图中的边都指向它的中心节点．又，每个节点至多与二个星图关联．故，每个节点在$G-A$中至多有一条边其方向是离开这个节点．这就导致在$G-A$的每一个连通片上至多有一个圈．即得引理． ■

定理6.3 判别一个图是否为蛛网图的问题，记之为$RBis$，可以建立一个有效的算法．即，

$$RBis\in\mathscr{P}. \tag{6.2}$$

证明 由引理6.1，和判别一个图是否至多有一个圈可以建立有效算法．实际上，相当在一个图上求一个支撑树[28]．故，定理得证． ■

然而，即使是对于蛛网图，确定其上的最大权独立集也有如下的结果．

定理6.4 记$WIBis$为在一个带权的蛛网图上求最大权独立集的问题．有

$$WIBis\in\mathscr{N}\mathscr{P}\mathscr{C}. \tag{6.3}$$

证明 首先，易验证，$WIBis\in\mathscr{N}\mathscr{P}$．又，由于求最大权独立集与求最大独立集是多项式等价的．实际上，总可假设在节点处的权为正整数，如节点v的权为$w(v)$，只要将每个节点用$w(v)$个互相独立的节点代替且使得它们每一个的相邻节点集与v的一样即足．然，在[24]中，已经给出从在一般图上求最大独立集到在蛛网图上求最大独立集的多项式变换．相应地，可知$WI\succ WIBis$．从而，由$WI\in\mathscr{N}\mathscr{P}\mathscr{C}$和引理2.2，即得定理． ■

如果一个二次拟布尔函数是本原的，则它的对抗图也称为是**二次本原图**．自然，容易看出，蛛网图不一定是本原的．

引理6.2 一个二次图是本原的，当且仅当它的边集可以被完备二分图所覆盖使得它们中的任何二个至多有一个公共节点．

证明 必要性可由本原的定义直接导出．充分性．仅取有二个完备二分图的情况为例．其余可类推．设$G[E_1]=(X_1,Y_1;E_1)$，$G[E_2]=(X_2,Y_2;E_2)$是二个完备二分图且有一个公共节点．不妨设$X_1\cap X_2\neq\varnothing$．由此可得

$$a=\sum_{v\in X_1\cap X_2}xy+\sum_{v\in X_1-X_2}xz_1+\sum_{v\in X_2-X_1}yz_2+\sum_{v\in Y_1}\overline{x}z_3+\sum_{v\in Y_2}\overline{y}z_4$$

就是一个二次本原拟布尔函数．其中，z_1,z_2,z_3和z_4是与$x,\overline{x},y,\overline{y}$不同的布尔变量． ■

然而，对于二次本原图却没有与蛛网图相类似的结果．

定理6.5 判别一个图是否为二次本原图的问题，记为RQP，是NP-完全的．即

$$KQP\in\mathscr{N}\mathscr{P}\mathscr{C} \tag{6.4}$$

证明 参见[8]（Crama & Hammer, 1985）． ■

更进一步，即使是判别一个二次图的边集是否可被星图以及四边形所覆盖使得它们之中任意二个至多有一个公共节点，记为$RCSS$，仍然是NP-完全问题．

定理6.6 $RCSS\in\mathscr{N}\mathscr{P}\mathscr{C}$．

证明 可以从$RQSS\succ RCSS$和定理6.5直接得到． ■

不管怎样，在上述二类本原图上求最大权独立集问题尚不知属于哪一类．

（待续）