第10卷 第3期 数学研究与评论 Vol. No. 3
1990年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1990

仿射型李代数g(A)的某些自同构群*

刘力实

(北京师范大学数学系)

§0 引言

$A=(a_{ij})$ 是 n 阶广义Cantan矩阵，即 A 满足：i) $a_{ii}=2$，$i=1,\cdots n$．ii) 当 $i\neq j$ 时，a_{ij} 是非正整数．iii) $a_{ij}=0\Rightarrow a_{ji}=0$．

$\mathfrak{h}$ 是复数域 $\mathbf{C}$ 上 $2n-l$ 维向量空间，$\mathfrak{h}^*$ 是 $\mathfrak{h}$ 的对偶空间．$\Pi=\{a_1,\cdots a_n\}$，$\Pi^\vee=\{a_1^\vee,\cdots,a_n^\vee\}$ 分别是 $\mathfrak{h}^*$ 与 $\mathfrak{h}$ 中线性无关子集，满足 $\langle a_i,a_j^\vee\rangle=a_i(a_j^\vee)=a_{ji}$，$i,j=1,\cdots,n$．

$\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ 是由 $\mathfrak{h}$ 及Chevalley生成元 $e_1,\cdots,e_n$，$f_1,\cdots,f_n$ 生成，以如下关系式定义的李代数：

$$\begin{cases}[e_i,f_j]=\delta_{ij}a_i^\vee & i,j=1,\cdots,n\\ [h,h']=0 & h,h'\in\mathfrak{h}\\ [h,e_i]=\langle a_i,h\rangle e_i & \\ [h,f_i]=-\langle a_i,h\rangle f_i & i=1,\cdots,n\ h\in\mathfrak{h}\end{cases}$$

则 $\tilde{\mathfrak{g}}(A)=\mathfrak{h}\oplus\sum_{0\neq a\in\mathfrak{h}^*}\tilde{\mathfrak{g}}_a$，其中 $\tilde{\mathfrak{g}}_a=\{x\in\tilde{\mathfrak{g}}(A)\mid[h,x]=a(h)x,\ \forall h\in\mathfrak{h}\}$．

设 τ 是 $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ 中与 $\mathfrak{h}$ 交为0的最大理想，称 $\mathfrak{g}(A)=\tilde{\mathfrak{g}}(A)/\tau$ 为Kac-Moody李代数（关于 A 的）．并有分解式 $\mathfrak{g}(A)=\mathfrak{h}\oplus\sum_{0\neq a\in\mathfrak{h}^*}\mathfrak{g}_a$．$\mathfrak{h}$ 称为 $\mathfrak{g}(A)$ 的Cartan子代数．其中 $\mathfrak{g}_a=\{x\in\mathfrak{g}(A)\mid[h,x]=a(h)\cdot x,\ \forall h\in\mathfrak{h}\}$．$\Delta=\{a\in\mathfrak{h}^*\mid a\neq0.\ \mathfrak{g}_a\neq0\}$ 称为 $\mathfrak{g}(A)$ 的根系，$a\in\Delta$ 称为 $\mathfrak{g}(A)$ 的根．且 $\Pi\subseteq\Delta$，Π 称为 Δ 的根基．具有性质：Δ 中每一元 a 可以唯一地表成 $a=\sum_1^n k_ia_i$ 的形式．其中 $k_1,\cdots,k_n$ 是同号整数．使用这个性质可以在 Δ 中抽象地定义根基．

$\Delta_+=\{a\in\Delta\mid a=\sum_1^n k_ia_i,\ k_1,\cdots,k_n\in\mathbf{Z}_+\}$ 称为正根集．

$\Delta_-=\{a\in\Delta\mid a=\sum_1^n k_ia_i,\ k_1,\cdots,k_n\in\mathbf{Z}_-\}$ 称为负根集．

ω 是 $\mathfrak{g}(A)$ 上对合自同构，满足 $\omega(h)=-h$，$\forall h\in$ $\omega(e_i)=\omega(f_i)=-e_i$ $i=1,\cdots,n$，称 ω 为 $\mathfrak{g}(A)$ 的Cartan对合．

$\mathscr{W}(\subseteq GL(\mathfrak{h}^*))$ 是 $\mathfrak{g}(A)$ 的Weyl群，由 γ_i $i=1,\cdots,n$ 生成其中 $\gamma_i(\lambda)=\lambda-\langle\lambda,$

* 1985年1月16日收到．

$a_i^\vee\rangle a_i$. $\forall\lambda\in\mathfrak{h}^*$.

$\Delta^{re}=\bigcup\limits_{w\in\mathscr{W}} w\Pi$称为实根集．$\Delta^{im}=\Delta\setminus\Delta^{re}$称为虚根集．

若 $A=DB$, $D=\mathrm{diag}\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$ $\varepsilon_i\neq 0$ $i_i\neq 1,\cdots, n$. $B=(b_{ij})$ 是对称矩阵，则称 A 是可对称化的．这时总可以这样地选取ε_i与b_{ij}，使每一ε_i是正有理数，每一b_{ij}是有理数．取定A的一个这样的分解式，可以定义$\mathfrak{h}$上一个非退化，对称双线性型（$\cdot|\cdot$），并扩充为$\mathfrak{g}(A)$上的非退化、对称双线性型（$\cdot|\cdot$），满足（$x|[y, z]$）=（$[x, y]|z$），$\forall x, y, z\in\mathfrak{g}(A)$．由此知（$\mathfrak{g}_\alpha|\mathfrak{g}_\beta$）= 0，当$\alpha+\beta\neq 0$；且$\mathfrak{g}_\alpha+\mathfrak{g}_{-\alpha}$是非退化子空间，$\alpha\in\Delta$.

ν: $\mathfrak{h}\to\mathfrak{h}^*$是由$\mathfrak{h}$上非退化对称双线性型（$\cdot|\cdot$）$|_{\mathfrak{h}}$导出的同构映射，由此导出$\mathfrak{h}^*$上非退化对称双线性型，仍以（$\cdot|\cdot$）记之．这时$\nu$是保距同构．当$x\in\mathfrak{g}_\alpha$，$y\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$时：$[x, y]=(x|y)\nu^{-1}(\alpha)$，$\alpha\in\Delta$.

以上见于〔1〕Chap. 1,2,3 . 本文假设A可对称化．

考虑如下几个群：$G=\{w\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}(A))\,|\,w\mathfrak{h}=\mathfrak{h}\}$,

$I=\{w\in G\,|\,w(x)=x \quad \forall x\in\mathfrak{g}'(A)=[\mathfrak{g}(A), \mathfrak{g}(A)]\}$,

$H=\{w\in G\,|\,(w(x)\,|\,w(y))=(x\,|\,y), \ \forall x, y\in\mathfrak{g}(A)\}$,

$\mathrm{Aut}\Delta=\{w\in GL(\mathfrak{h}^*)\,|\,w\Delta=\Delta, \ (w(\lambda)\,|\,w(\mu))=(\lambda\,|\,\mu), \ \forall\lambda, \mu\in\mathfrak{h}^*\}$,

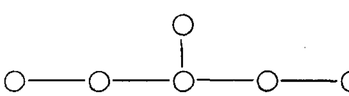
$\Gamma=\{\sigma\in\mathrm{Aut}\Delta\,|\,\sigma\Pi=\Pi\}$,

其中AutΔ与Γ分别称为根自同构群及Dynkin图自同构群．本文讨论了以上几个群的结构，得到如下结果．

1）推广有限维单李代数的同构定理于Kac—Moody李代数 $\mathfrak{g}(A)$，这里A可对称化．由此得群的满同态Φ：$H\longrightarrow\mathrm{Aut}\Delta$，且$\ker\Phi\cong\overbrace{C^*\times\cdots\times C^*}^{n}$.

2）当$A=(a_{ij})_{i, j=0}^{l}$是$l+1$阶仿射型广义Cartan矩阵时（〔1〕Chap 4.），每一个使A的Dynkin图不变的Π上置换σ可以唯一地扩张为$\mathfrak{h}^*$上保距同构．因此Γ是S_{l+1}的子群．

3）当仿射型Dynkin图S(A）不以：○——○⇐═○，○⇐═○⇐═○，



为子图时，正合列：$1\longrightarrow\ker\Phi\longrightarrow\Phi^{-1}(\mathscr{W})\longrightarrow\mathscr{W}\longrightarrow 1$是分裂的，反之不是分裂的．对于分裂的情形，$H=(\ker\Phi\rtimes\widetilde{\mathscr{W}})\rtimes(\overline{\Gamma}\times\langle\omega\rangle)$，其中$\widetilde{\mathscr{W}}$与$\overline{\Gamma}$在$\Phi$下分别和$\mathscr{W}$与$\Gamma$同构．又知仿射型Weyl群是一个有限型Weyl群和一个秩为l的自由Abel群的半直积（〔1〕Chap.6）．此时H表成一些已知群的半直积．因为任一有限维单李代数的Dynkin图一定是某个仿射型Dynkin图的子图，所以如上结果可以完全地移到有限维单李代数上去．

4）当A可对称化，则$G=H\cdot I$，且 $I\cong\{M_{n-l}(C), +\}$．当A是仿射型广义Cartan矩阵，则$G=H\rtimes I$ $I\cong\{C, +\}$．

这篇文章是在我的老师郝钢新先生的指导下完成的．在这里，我向郝钢新先生表示衷心的感谢．

§1 推广的同构定理，群H到群AutΔ上的满同态ϕ

本节假设A是可对称化广义Cartan矩阵.

设$w\in$G. $\forall\alpha\in\Delta$，显然有$w\mathfrak{g}_\alpha=\mathfrak{g}_{\alpha\cdot w^{-1}|}$，所以$\alpha\cdot w^{-1}|_{\mathfrak{h}}\in\Delta$，由于$w$可逆所以$\Delta\cdot w^{-1}|_{\mathfrak{h}}=\Delta$. 由$w$规定$w^*$：$\mathfrak{h}^*\to\mathfrak{h}^*$. 使得$\alpha\mapsto\alpha\cdot w^{-1}|_{\mathfrak{h}}$，显然$w^*$是$\mathfrak{h}^*$上线性同构，且$w^*\Delta=\Delta$，$w\mathfrak{g}_\alpha=\mathfrak{g}_{w^*(\alpha)}$，$\forall\alpha\in\mathfrak{h}^*$.

若w进一步满足$(w(h_1)|w(h_2))=(h_1|h_2)$，$\forall h_1,h_2\in\mathfrak{h}$，那么$\forall\lambda\in\mathfrak{h}^*$，$h\in\mathfrak{h}$：$\langle w^*(\lambda),h\rangle=\langle\lambda\cdot w^{-1},h\rangle=\langle\lambda,w^{-1}(h)\rangle=(v^{-1}(\lambda)|w^{-1}(h))=(wv^{-1}(\lambda)|h)=\langle vwv^{-1}(\lambda),h\rangle$. 所以$w^*=v\cdot w|_{\mathfrak{h}}\cdot v^{-1}$，$w^*$是$\mathfrak{h}^*$上保距同构.

引理1.1 设$w\in$G且$\forall h_1,h_2\in\mathfrak{h}$有$(w(h_1)|w(h_2))=(h_1|h_2)$. 则$\forall x,y\in\mathfrak{g}(A)$有$(w(x)|w(y))=(x|y)$，从而$w\in$H.

证 $\alpha,\beta\in\Delta$且$\alpha+\beta\neq0$，$w^*(\alpha)+w^*(\beta)\neq0$. 此时$(\mathfrak{g}_{w^*(\alpha)}|\mathfrak{g}_{w^*(\beta)})=0=(\mathfrak{g}_\alpha|\mathfrak{g}_\beta)$.

设$x\in\mathfrak{g}_\alpha$，$y\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$，$\alpha\in\Delta$. 由上面讨论$w^*=vw|_{\mathfrak{h}}v^{-1}\Rightarrow wv^{-1}(\alpha)=v^{-1}w^*(\alpha)$. $w([x,y])=w((x|y)\cdot v^{-1}(\alpha))=(x|y)w(v^{-1}(\alpha))=(x|y)v^{-1}w^*(\alpha)$. 另一方面：$w([x,y])=[w(x),w(y)]=(w(x)|w(y))\cdot v^{-1}(\alpha)$. 所以：$(x|y)=(w(x)|w(y))$. ■

$\gamma_i^{ad}=\exp(\mathrm{ad}f_i)\exp(\mathrm{ad}(-e_i))\cdot\exp(\mathrm{ad}f_i)\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}(A))\,i=1,\cdots,n$ ([1] Chap. 2)，不难验证γ_i^{ad}使$\mathfrak{h}$不变，且$\gamma_i^{ad}(h)=h-\langle\alpha_i,h\rangle.\alpha_i=h-2((h|\alpha_i)/(\alpha_i|\alpha_i))\alpha_i$，$\forall h\in\mathfrak{h}$. 由此可见$\gamma_i^{ad}$是$\mathfrak{h}$上关于$\alpha_i$的对称，由引理1.1$\gamma_i^{ad}\in$H，$i=1,\cdots,n$. 类似可知Cartan对合$\omega\in$H，且$\omega^*=-1|_{\mathfrak{h}}$. 又知$v(\alpha_i)=2(\alpha_i|\alpha_i)^{-1}\cdot\alpha_i$所以$(\gamma_i^{ad})^*=v\gamma_i^{ad}|_{\mathfrak{h}}\cdot v^{-1}=\gamma_i$是$\mathfrak{h}^*$上关于$\alpha_i$的对称. $i=1,\cdots,n$，而我们知道Weyl群$\mathscr{W}$由$\gamma_1,\cdots,\gamma_n$生成([1] Chap·3).

下面讨论H与AutΔ的关系. 由于以下的讨论常用到[1]的命题5.9，所以把这一命题编为本文的：

命题1.2 Δ的任一根基Π'必$\mathscr{W}$-共轭于Π或$-\Pi$（证明见[1]，[2]）.

由命题1.2不难得到$\mathscr{W}\lhd\mathrm{Aut}\Delta$.

命题1.3 $\mathrm{Aut}\Delta=\mathscr{W}\cdot\Gamma\{\pm1_{\mathfrak{h}^*}\}$.

证 由命题1.2立得. ■

推论1.4 当A是仿射型或不定型广义Cartan矩阵，则$\mathrm{Aut}\Delta=\mathscr{W}\rtimes(\Gamma\times\{\pm1_{\mathfrak{h}^*}\})$.

证 只需证$\mathscr{W}\cap(\Gamma\times\{\pm1_{\mathfrak{h}^*}\})=\{1\}$.

$\forall w\in\mathscr{W}\cap(\Gamma\times\{\pm1_{\mathfrak{h}^*}\})$. 则$w\Pi=\Pi$（或$-\Pi$）. 由题设$\Delta_+^{im}\neq\phi$又知$w\Delta_+^{im}=\Delta_+^{im}$([1] Chap.5)$\Rightarrow w\Pi=\Pi$. 假若$w\neq1$设$w=\gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_s}$是一既约表示，其中$s\geq1$. 则$w(\alpha_{i_s})\in\Delta_-$. 此与$w\Pi=\Pi$矛盾，所以$w=1$. ■

$\forall\sigma\in\Gamma$，设$\sigma(\alpha_i)=\alpha_{\sigma_0(i)}$ $i=1,\cdots,n$. σ_0是$\{1,\cdots,n\}$上一个置换. 则$\sigma\gamma_i\sigma^{-1}=\gamma_{\sigma_0(i)}$. 又$\pm1$与$\mathscr{W}$中每一个元可换. 所以推论1.4中Aut$\Delta$的半直积结构完全清楚.

$\forall w_1,w_2\in$H，$(w_1\cdot w_2)^*=v(w_1\cdot w_2)|_{\mathfrak{h}}v^{-1}=(vw_1|_{\mathfrak{h}}v^{-1})(vw_2|_{\mathfrak{h}}v^{-1})=w_1^*\cdot w_2^*$. 由此得到H到Aut$\Delta$的同态$\Phi$：$w\mapsto w^*$.

我们要证明Φ是满同态.

引理1.5 $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$是$\Delta$的一个根基，$\forall0\neq x_i\in\mathfrak{g}_{\beta_i}0\neq y_i\in\mathfrak{g}_{-\beta_i}$，$i=1,\cdots,n$. 则$\mathfrak{h}$，$x_1,\cdots,x_n$，$y_1,\cdots,y_n$生成$\mathfrak{g}(A)$.

证 由前面关于γ_i^{ad}的论述可知$\forall w \in \mathscr{W}$. 存在$\overline{w} \in H$使$\overline{w}^* = w$. 并利用命题1.2立得. ■

命题1.6 $\forall w \in \mathrm{Aut}\Delta$, $\forall 0 \neq x_i \in \mathfrak{g}_{w(a_i)}$, $i = 1, \cdots, n$. 则存在唯一的$\overline{w} \in H$使得$\overline{w}(e_i) = x_i$, $i = 1, \cdots, n$. $\overline{w}^* = w$.

证 设$w(a_i) = \beta_i$ $i = 1, \cdots, n$. 则$\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$是$\Delta$的一个根基. $\nu^{-1}(\beta_i) = |a_i|^2/2 \cdot \nu^{-1} w\nu(a_i)$. 取$y_i \in \mathfrak{g}_{-\beta_i}$使$[x_i, y_i] = \nu^{-1} w\nu(a_i)$, $i = 1, \cdots, n$. 显然每一$y_i \neq 0$. 当$1 \leq i, j \leq n$, 且$i \neq j$时, $a_i - a_j \notin \Delta \Rightarrow \beta_i - \beta_j \notin \Delta \Rightarrow [x_i, y_j] = 0$. $\forall h \in \mathfrak{h}$: $[\nu^{-1} w\nu(h), x_i] = \langle \beta_i, \nu^{-1} w\nu(h) \rangle x_i = \langle w(a_i), \nu^{-1} w\nu(h) \rangle x_i = \langle a_i, h \rangle x_i$. 同理$[\nu^{-1} w\nu(h), y_i] = -\langle a_i, h \rangle y_i$. 所以存在李代数同态$\widetilde{w}$: $\widetilde{\mathfrak{g}}(A) \to \mathfrak{g}(A)$使得$\widetilde{w}(h) = \nu^{-1} w\nu(h)$, $\forall h \in \mathfrak{h}$. 且$\widetilde{w}(e_i) = x_i$, $\widetilde{w}(f_i) = y_i$ $i = 1, \cdots, n$. 由引理1.5知$\widetilde{w}$是满射.

τ是$\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$中与$\mathfrak{h}$交为0的最大理想, 要证$\tau = \ker \widetilde{w}$.

因为$\widetilde{w}|_{\mathfrak{h}}$是单射, 所以$\ker \widetilde{w} \cap \mathfrak{h} = \{0\} \Rightarrow \ker \widetilde{w} \subseteq \tau$. 又因为$\widetilde{w}$是满射, 所以$\widetilde{w}\tau \lhd \mathfrak{g}(A)$. 又知$\tau \subseteq \sum\limits_{a \neq 0} \widetilde{\mathfrak{g}}_a$所以$\widetilde{w}\tau \subseteq \sum\limits_{a \neq 0} \mathfrak{g}_a \Rightarrow \widetilde{w}\tau \cap \mathfrak{h} = \{0\}$. 由$\mathfrak{g}(A)$的定义知$\widetilde{w}\tau = \{0\} \Rightarrow \tau \subseteq \ker \widetilde{w} \Rightarrow \tau = \ker \widetilde{w}$.

令υ是$\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$到$\mathfrak{g}(A)$上自然同态, $\ker \upsilon = \ker \widetilde{w} = \tau$. 则存在$\mathfrak{g}(A)$上自同构$\overline{w}$使$\widetilde{w} = \overline{w}\upsilon$, 则$\overline{w}$使$\mathfrak{h}$不变且$\overline{w}|_{\mathfrak{h}} = \nu^{-1} w\nu$, 所以$\overline{w}$满足引理1.1条件, $\Rightarrow \overline{w} \in H$. $\overline{w}(e_i) = x_i$, $i = 1, \cdots, n$. $\overline{w}^* = \nu \overline{w}|_{\mathfrak{h}} \nu^{-1} = w$, 且有$\overline{w}(f_i) = y_i$, $i = 1, \cdots n$.

每一x_i确定了唯一的$y_i \in \mathfrak{g}_{-\beta_i}$使$[x_i, y_i] = \nu^{-1} w\nu(a_i)$ $i = 1, \cdots, n$. 根据引理1.5, $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$生成$\mathfrak{g}(A)$, 可见上面找到的$\overline{w}$是唯一的. ■

由命题1.6知Φ: $H \to \mathrm{Aut}\Delta$是满态, 设$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$是复数乘法群.

由命题1.6知$\forall a_1, \cdots, a_n \in \boldsymbol{C}^*$存在唯一的$\tau = \tau(a_1, \cdots, a_n) \in H$使$\tau^* = 1$ (或说$\tau|_{\mathfrak{h}} = 1_{\mathfrak{h}}$), $\tau(e_i) = a_i e_i$, $i = 1, \cdots, n$, 由此知$\tau = \tau(a_1, \cdots, a_n) \in \ker\Phi$. 不难证明$\forall \tau \in \ker\Phi$, 则存在$a_1, \cdots, a_n \in \boldsymbol{C}^*$使$\tau = \tau(a_1, \cdots, a_n)$. 即$\ker\Phi = \{\tau(a_1, \cdots, a_n) \mid a_1, \cdots, a_n \in \boldsymbol{C}^*\}$, 有:

推论1.7 $\ker\Phi \cong \boldsymbol{C}^* \times \overset{n}{\cdots} \times \boldsymbol{C}^*$, 因而$\ker\Phi$是Abel群. ■

$\sigma \in \Gamma$, $\sigma(a_i) = a_{\sigma_0(i)}$, $i = 1, \cdots, n$. 由命题1.6存在唯一的$\overline{\sigma} \in H$使得$\overline{\sigma}^* = \sigma$, $\overline{\sigma}(e_i) = e_{\sigma_0(i)}$, $i = 1, \cdots, n$.

令$\overline{\Gamma} = \{\overline{\sigma} \mid \sigma \in \Gamma\}$, 易见$\overline{\Gamma}$是H的子群, 且在$\Phi$下$\overline{\Gamma}$与$\Gamma$同构, 又知$\Phi(\omega) = -1$, 我们有:

推论1.8 1) 若A是仿射型或不定型广义Cartan矩阵, 则: $H = \Phi^{-1}(\mathscr{W}) \rtimes (\overline{\Gamma} \times \langle \omega \rangle)$

2) 若A是有限型广义Cartan矩阵, 则: $H = \Phi^{-1}(\mathscr{W}) \rtimes \Gamma$.

证 由推论1.4及上面讨论立得. ■

引理1.9 Cartan对合ω与γ_i^{ad}可换, $i = 1, \cdots, n$.

证 因为$\gamma_i^{ad}(e_i) = -f_i$, $\gamma_i^{ad}(f_i) = -e_i$所以: $(\gamma_i^{ad} \cdot \omega)\gamma_i^{ad}(\gamma_i^{ad} \cdot \omega)^{-1} = \exp(\mathrm{ad}(\gamma_i^{ad}\omega(f_i)))\exp(\mathrm{ad}(\gamma_i^{ad}\omega(-e_i))) \cdot \exp(\mathrm{ad}(\gamma_i^{ad}\omega(f_i))) = \exp(\mathrm{ad} f_i) \cdot \exp(\mathrm{ad}(-e_i))\exp(\mathrm{ad} f_i) = \gamma_i^{ad} \Rightarrow \omega \cdot \gamma_i^{ad} = \gamma_i^{ad} \cdot \omega$. ■

利用命题1.6不难验证:

1° $\omega\tau(a_1, \cdots, a_n)\omega^{-1} = \tau(a_1^{-1}, \cdots, a_n^{-1})$;

2° $\forall\sigma\in\Gamma$，使得$\sigma(\alpha_i)=\alpha_{\sigma_0(i)}$．$i=1,\cdots,n$．则：

$\bar{\sigma}\tau(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\bar{\sigma}^{-1}=\tau(\alpha_{\sigma_0^{-1}(1)},\cdots,\alpha_{\sigma_0^{-1}(n)})$，$\bar{\sigma}\gamma_i^{\mathrm{ad}}\bar{\sigma}^{-1}=\gamma_{\sigma(i)}^{\mathrm{ad}}$．

因此推论1.8中的半直积结构是完全清楚的．那么对于H的讨论归结为对$\Phi^{-1}(\mathscr{W})$与Γ的讨论．在后两节中，我们将在A是仿射型广义Cartan矩阵的假设下定成这一工作．

§2 Dynkin图自同构群Γ

$A=(a_{ij})_{i,j=0}^{l}$是仿射型广义Cartan矩阵，按通常习惯用“0，…，l”为Π、$\Pi^{\vee}$及Chevalley生成元编号．

定义 $\Gamma_0=\{\sigma\mid\sigma$是$\Pi$上置换，$\sigma(\alpha_i)=\alpha_{\sigma(i)}$ $i=0,\cdots,l$使得$\langle\alpha_i,\alpha_j^{\vee}\rangle=\langle\alpha_{\sigma(i)},\alpha_{\sigma(j)}^{\vee}\rangle$ $i\neq j\}$

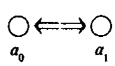
因为Π连通，所以当$\sigma\in\Gamma_0$有：$|\alpha_{\sigma(i)}|^2/|\alpha_{\sigma(j)}|^2=|\alpha_i|^2/|\alpha_j|^2$，由此得$|\alpha_i|^2=|\alpha_{\sigma(i)}|^2$ $i=0,\cdots,l$．直观地说：$\sigma\in\Gamma_0$当且仅当σ使Π的Dynkin图不变．$\forall\sigma\in\Gamma$，则$\sigma|_{\Pi}\in\Gamma_0$下面将看到$\sigma\mapsto\sigma|_{\Pi}$给出$\Gamma$到$\Gamma_0$上的同构．

$\sigma\in\Gamma_0$，则σ可以唯一地延拓为$\mathbf{h}_0^*=\sum_{i=0}^{l}\mathbf{C}\alpha_i$上线性同构，仍然把它记作$\sigma$．

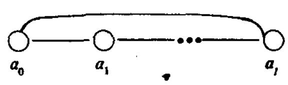
引理2.1 如上的σ是$\mathbf{h}_0^*$上保距同构．

证 $(\sigma(\alpha_i)|\sigma(\alpha_j))=(\alpha_{\sigma(i)}|\alpha_{\sigma(j)})=\langle\alpha_{\sigma(i)},\nu^{-1}(\alpha_{\sigma(j)})\rangle=\langle\alpha_{\sigma(i)},|\alpha_{\sigma(j)}|^2/2\cdot\alpha_{\sigma(j)}^{\vee}\rangle=\langle\alpha_i,|\alpha_j|^2/2\alpha_j^{\vee}\rangle=\langle\alpha_i,\nu^{-1}(\alpha_j)\rangle=(\alpha_i|\alpha_j)$． ■

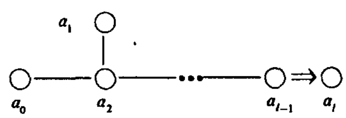
因此可以认为$\Gamma_0=\{\sigma\mid\sigma$是$\mathbf{h}_0^*$上保距同构，且$\sigma\Pi=\Pi\}$．下面我们对每一个仿射型Dynkin图（〔1〕Chap.4）找出相应的Γ_0．

$A_1^{(1)}$：


取$\sigma=(0,1)$，则$\Gamma_0=\langle\sigma\rangle$，$|\Gamma_0|=2$

$A_l^{(1)}$ $(l\geq 2)$：


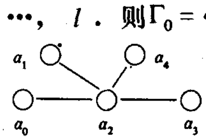
取$\sigma(i)=l-i$，$i=0,\cdots,l$，取$\pi=(0,1,\cdots,l)$ 则$\Gamma_0=\langle\pi\rangle\rtimes\langle\sigma\rangle$，$\sigma\pi\sigma^{-1}=\pi^{-1}$，$|\Gamma_0|=2(l+1)$．

$B_l^{(1)}$ $(l\geq 3)$：


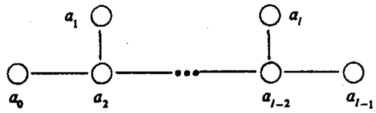
取$\sigma=(0,1)$，则$\Gamma_0=\langle\sigma\rangle$，$|\Gamma_0|=2$．

$C_l^{(1)}$ $(l\geq 2)$：

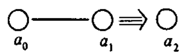

取$\sigma(i)=l-i$，$i=0,\cdots,l$．则$\Gamma_0=\langle\sigma\rangle$，$|\Gamma_0|=2$．

$D_4^{(1)}$


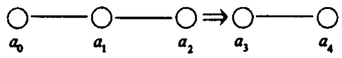
$\Gamma_0=\mathbf{S}_{\{0,1,3,4,\}}=\mathbf{S}_4$，$|\Gamma_0|=24$．

$D_l^{(1)}$ $(l \geq 3)$: 

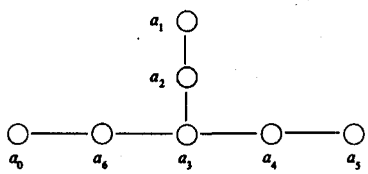
取$\sigma(i)=l-i$，$i=0,\cdots,l$. 取$\pi=(0,\ 1)$ 则Γ_0由σ与π生成. 令$\pi\sigma=\lambda$，则$o(\lambda)=4$，$\Gamma_0=\langle\lambda\rangle\rtimes\langle\pi\rangle$，$\pi\lambda\pi^{-1}=\lambda^{-1}$. $|\Gamma_0|=8$.

$G_2^{(1)}$: 

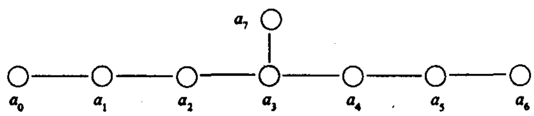
$\Gamma_0=\{1\}$ $|\Gamma_0|=1$

$F_4^{(1)}$: 

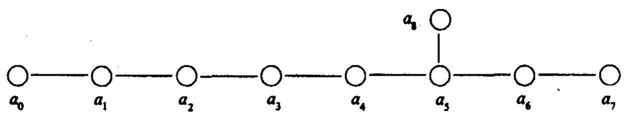
则$\Gamma_0=\{1\}$，$|\Gamma_0|=1$.

$E_6^{(1)}$: 

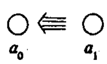
取$\sigma=(2,4,6)(1,5,0)$，取$\pi=(2,\ 4)(1,\ 5)$，则$\Gamma_0=\langle\sigma,\ \pi\rangle\cong S_3$，$|\Gamma_0|=6$.

$E_7^{(1)}$: 

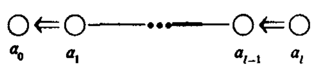
取$\sigma=(0,\ 6)(1,\ 5)(2,\ 4)$，则$\Gamma_0=\langle\sigma\rangle$，$|\Gamma_0|=2$.

$E_8^{(1)}$: 

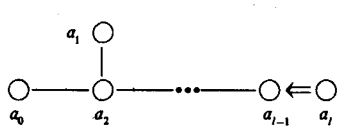
则$\Gamma_0=\{1\}$，$|\Gamma_0|=1$.

$A_2^{(2)}$: 

则$\Gamma_0=\{1\}$，$|\Gamma_0|=1$.

$A_{2l}^{(2)}$ $(l \geq 2)$: 

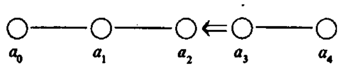
则$\Gamma_0=\{1\}$，$|\Gamma_0|=1$

$A_{2l-1}^{(2)}$ $(l\geq 3)$: 

取$\sigma=(0,\ 1)$，则$\Gamma_0=\langle\sigma\rangle$. $|\Gamma_0|=2$.

$D_{l+1}^{(2)}$ $(l\geq 2)$: 

取$\sigma(i)=l-i$，$i=0,\cdots,l$. 则$\Gamma_0=\langle\sigma\rangle$. $|\Gamma_0|=2$

$E_6^{(2)}$: 

则$\Gamma_0=\{1\}$，$|\Gamma_0|=1$.

$$D_4^{(3)}:\quad \underset{\alpha_0}{\bigcirc}\text{——}\underset{\alpha_1}{\bigcirc}\Leftarrow\underset{\alpha_2}{\bigcirc}$$

则$\Gamma_0=\{1\}$，$|\Gamma_0|=1$

引理2.2 $\sigma\in\Gamma_0$，则$\sigma\Delta_+=\Delta_+$.

证 $\alpha=\sum\limits_{i=0}^{l}k_i\alpha_i\in\Delta$，$\mathrm{ht}\alpha=\sum\limits_{i=0}^{l}k_i$，对$\mathrm{ht}\alpha$用归纳法可证明$\sigma\Delta_+\subseteq\Delta_+$，又$\sigma$可逆$\Rightarrow\sigma\Delta_+=\Delta_+$.

Δ_+. ∎

推论2.3 $\sigma\Delta=\Delta$，$\sigma\Delta^{re}=\Delta^{re}$，$\sigma\Delta^{im}=\Delta^{im}$. ∎

引理2.4 若B是$l+1$阶仿射型实矩阵，则$\forall 0\neq a\in\boldsymbol{C}$，秩$\left(B,\ \begin{pmatrix}a\\ \vdots\\ a\end{pmatrix}\right)=l+1$，因而$BX=\begin{pmatrix}a\\ \vdots\\ a\end{pmatrix}$无解.

证 因为B是仿射型矩阵，所以$\forall\xi\in\boldsymbol{R}^{(l+1)}$，$B\xi\geq0\Rightarrow B\xi=0$（〔1〕Chop4）. 所以$BX=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$在$\boldsymbol{R}$上无解$\Rightarrow$秩$\left(B\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right)>$秩$B=l$. $\Rightarrow$秩$\left(B,\ \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right)=l+1$. 所以当$0\neq a\in\boldsymbol{C}$，秩$\left(B,\ \begin{pmatrix}a\\ \vdots\\ a\end{pmatrix}\right)=l+1$因而$BX=\begin{pmatrix}a\\ \vdots\\ a\end{pmatrix}$无解. ∎

引理2.5 $\sigma\in\Gamma_0$，则σ可以唯一地延拓为$\mathfrak{h}^*$上保距同构.

证 A的一个分解$A=DB$，B是有理数域$\mathbf{Q}$上$l+1$阶对称仿射型矩阵. 取定$\Lambda\in\mathfrak{h}^*$满足$(\alpha_i|\Lambda)=1$，$i=0,\cdots,l$. 由引理2.4知$\{\alpha_0,\cdots,\alpha_l,\Lambda\}$作成$\mathfrak{h}^*$上一组基.（·1·）.

关于这组基的矩阵是$\left(\begin{array}{c|c} B & \begin{matrix}1\\ \vdots\\ 1\end{matrix} \\ \hline 1,\cdots,1 & a\end{array}\right)$. 将$\sigma$延拓为$\mathfrak{h}^*$上线性变换$\sigma_1$，则$(\sigma_1(\alpha_0),\cdots,\sigma_1(\alpha_l),\sigma_1(\Lambda))=(\alpha_0,\cdots,\alpha_l,\Lambda)\left(\begin{array}{c|c} T & \varepsilon \\ \hline & b\end{array}\right)$，这里$T$是$l+1$阶置换阵，使得${}^tTBT=B$. ε是$l+1$维列向量，$b\in\boldsymbol{C}$. 下面确定ε与b使σ_1是*上保距变换.

比较：$\left(\begin{array}{c|c} {}^tT & 0 \\ \hline {}^t\varepsilon & b\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} B & \begin{matrix}1\\ \vdots\\ 1\end{matrix} \\ \hline 1,\cdots,1 & a\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} T & \varepsilon \\ \hline & b\end{array}\right)$与$\left(\begin{array}{c|c} B & \begin{matrix}1\\ \vdots\\ 1\end{matrix} \\ \hline 1,\cdots,1 & a\end{array}\right)$，可知$\sigma_1$是*上保距变换，当且仅当$\varepsilon$与$b$满足：

$$\mathrm{I}\quad\begin{cases} B\varepsilon=\begin{pmatrix}1-b\\ \vdots\\ 1-b\end{pmatrix} \\ {}^t\varepsilon B\varepsilon+2(b,\cdots,b)\varepsilon+b^2a=a\end{cases}$$

由于$BX=O$的解空间维数是1，有基础解系$\delta>0$.（〔1〕Chap.4），且根据引理2.4可知

I 有唯一解 $b=1$，$\varepsilon=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$，所以$\sigma$可以唯一地延拓为 $\mathfrak{h}^*$上保距变换． ■

命题2.6 $\mathfrak{g}(A)$ 的Dynkin图自同构群Γ与Γ_0同构，因而是S_{l+1}的子群．

证 由推论2.3及引理2.5立得． ■

至此可以认为$\Gamma=\Gamma_0$．

§3 $\Phi^{-1}(\mathscr{W})$ 的结构

设A是可对称化广义Cartan矩阵．看正合列

（＊） $1\to\ker\Phi\to\Phi^{-1}(\mathscr{W})\to\mathscr{W}\to 1$

如果$A=\begin{pmatrix}2 & a_{12}\\ a_{21} & 2\end{pmatrix}$，且$a_{12}\cdot a_{21}\geq 4$ 则$\mathscr{W}$是两个二阶群的自由积（〔1〕Chap.3）．这时不难看出正合列（＊）是分裂的．下面在$A=(a_{ij})_0^l$是仿射型广义Cartan矩阵的假定下，讨论正合列（＊）什么时候是分裂的，为此，先给出几个等式．

（1）当$i\neq j$，$\gamma_i^{\mathrm{ad}}(e_j)=(-1)^{-a_{ij}}\dfrac{1}{(-a_{ij})!}(\mathrm{ad}e_i)^{-a_{ij}}(e_j)$

证 当$a_{ij}=0$．则$\gamma_i^{\mathrm{ad}}(e_j)=e_j$．设$-a_{ij}=k>0$，则$\exp(\mathrm{ad}f_i)(e_j)=e_j$．$\exp(\mathrm{ad}(-e_i))(e_j)=e_j-(\mathrm{ad}e_i)(e_j)+\cdots+(-1)^k\frac{1}{k!}(\mathrm{ad}e_i)^k(e_j)$．又$\gamma_i^{\mathrm{ad}}(e_j)\in\mathfrak{g}_{\gamma_i(\alpha_j)}=\mathfrak{g}_{k\alpha_i+\alpha_j}\Rightarrow\gamma_i^{\mathrm{ad}}(e_j)=(-1)^k\frac{1}{k!}(\mathrm{ad}e_i)^k(e_j)$． ■

（2）当 $i\neq j$，$\gamma_i^{\mathrm{ad}}(f_j)=\dfrac{1}{(-a_{ij})!}(\mathrm{ad}f_i)^{-a_{ij}}(f_j)$

证 由（1）及引理1.9立得． ■

（3）$\gamma_i^{\mathrm{ad}}(e_i)=-f_i$；$\gamma_i^{\mathrm{ad}}(f_i)=-e_i$． ■

（4） $(\gamma_i^{\mathrm{ad}})^2(e_j)=(-1)^{|a_{ij}|}e_j$；　$(\gamma_i^{\mathrm{ad}})^2(f_j)=(-1)^{|a_{ij}|}(f_j)$．

证 当 $i=j$，由（3）立得．当 $i\neq j$，不妨假设$-a_{ij}=k>0$．由归纳法不难得出：当$1\leq m\leq k$，$\mathrm{ad}(f_i)(\mathrm{ad}e_i)^m(e_j)=m(k-m+1)(\mathrm{ad}e_i)^{m-1}(e_j)\Rightarrow(\mathrm{ad}f_i)^k(\mathrm{ad}e_i)^k(e_j)=(k!)^2e_j$，再利用（1）立得． ■

由（4）及命题1.6得：

（5） $(\gamma_i^{\mathrm{ad}})^2=\tau((-1)^{|a_{i0}|},\cdots,(-1)^{|a_{il}|})$ $i=0,\cdots,l$． ■

（6）当i，j不相连（即$a_{ij}=0$）：$\gamma_i^{\mathrm{ad}}\gamma_j^{\mathrm{ad}}=\gamma_j^{\mathrm{ad}}\gamma_i^{\mathrm{ad}}$．

证 利用（1）． ■

（7）当$a_{ij}=a_{ji}=-1$时： $(\gamma_i^{\mathrm{ad}}\gamma_j^{\mathrm{ad}})^3=1$

证 $\Phi(\gamma_i^{\mathrm{ad}}\cdot\gamma_j^{\mathrm{ad}})=\gamma_i\cdot\gamma_j$，又知$(\gamma_i\gamma_j)^3=1$（〔1〕Chap.3）．由命题1.6只须验证$(\gamma_i^{\mathrm{ad}}\gamma_j^{\mathrm{ad}})^3(e_k)=e_k$，$k=0,\cdots,l$，利用公式（1）（2）（3）（4），经具体计算，不难对仿射型Dynkin图中出现的所有情形一一验证． ■

（8）当$a_{ij}=-2$，$a_{ji}=-1$，则 $(\gamma_i^{\mathrm{ad}}\gamma_j^{\mathrm{ad}})^4(e_i)=e_i$，$(\gamma_i^{\mathrm{ad}}\gamma_j^{\mathrm{ad}})^4(e_j)=e_j$且如下成立：

（8.1）当$a_{jk}=-1$或-2（此时i，k不相连）则 $(\gamma_i^{\mathrm{ad}}\gamma_j^{\mathrm{ad}})^4(e_k)=e_k$

（8.2）当$a_{ik}=-1$（此时j，k不相连）则 $(\gamma_i^{\mathrm{ad}}\gamma_j^{\mathrm{ad}})^4(e_k)=-e_k$

（8.3）当$a_{ik}=-2$（此时j，k不相连）则 $(\gamma_i^{\mathrm{ad}}\gamma_j^{\mathrm{ad}})^4(e_k)=e_k$

证 可根据（1）(2)(3)(4）直接验证. ■

（9）当$a_{ij}=-3$（此时$a_{ji}=-1$） $(\gamma_i^{ad}\gamma_j^{ad})^6=1$

证 类似（7）可证. ■

（10）$\gamma_i^{ad}\tau(a_0, a_1, \cdots, a_l)=\tau(b_0, b_1, \cdots b_l)\gamma_i^{ad}$其中：$b_i=a_i^{-1}$且当$j\neq i$，$b_j=a_i^{-a_{ij}}\cdot a_j$.

证 分别验证两侧在$e_0, \cdots, e_l$.上作用，并利用命题1.6立得. ■

已知Weyl群$\mathscr{W}$是由$\mathfrak{h}^*$上对称：$\gamma_0, \cdots, \gamma_l$生成并由如下关系式确定的Coxeter群：

1° $\gamma_i^2=1$，$i=0,\cdots, l$. 2°. 当$i\neq j$，$(\gamma_i\gamma_j)^{m_{ij}}=1$，这里$m_{ij}$等于2, 3, 4, 6，$+\infty$顺次对应于$a_{ij}a_{ji}$等于0, 1, 2, 3和$\geq 4$.（〔3〕，〔4〕).

所以正合列（*）是分裂的，当且仅当存在$\rho_i=\tau_i\cdot\gamma_i^{ad}\in\Phi^{-1}(\mathscr{W})$满足关系式$1^\circ$，$2^\circ$，其中$\tau_i=\tau(k_{i0}, k_{i1}, \cdots, k_{il})\in\ker\Phi$.

命题3.1 若A型如$A_l^{(1)}$（$l\geq 1$），$B_l^{(1)}$（$l\geq 3$），$C_2^{(1)}$，$G_2^{(1)}$，$D_l^{(1)}$（$l\geq 4$），$A_2^{(2)}$，$D_{l+1}^{(2)}$（$l\geq 2$），$D_4^{(3)}$，相应的正合列（*）是分裂的.

证 对如上的每一个$X_N^{(k)}$要找一组合适的$\rho_0, \cdots, \rho_l$，只须确定$\tau_i=\tau(k_{i0}, \cdots, k_{il})$，$i=0, \cdots, l$. 我们用矩阵$T(X_N^{(k)})=(k_{ij})_{i,j=0}^l$描述这一组$\tau_i$，$i=0, \cdots, l$.

（i）当$X_N^{(k)}=A_l^{(1)}$（$l\geq 1$），$G_2^{(1)}$，$A_2^{(2)}$，$D_{l+1}^{(2)}$（$l\geq 2$），$C_2^{(1)}$，$D_4^{(3)}$时，

按如下方式取$T(X_N^{(k)})$，$k_{ij}=\begin{cases}\sqrt{-1}^{\,-a_{ij}}, & i>j\\ 1 & i=j\\ (-\sqrt{-1})^{-a_{ij}}, & i<j\end{cases}$.（特别的对于$A_l^{(1)}$（$l\geq 2$），认为"$l<0$"）. 下面为了清楚起见，具体写出每个$T(X_N^{(k)})$：

（i，1）$T(A_1^{(1)})=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$，

$$（i，2）\ T(A_l^{(1)})=\begin{bmatrix}1, & -\sqrt{-1}, & 1, & \cdots & & \cdots, & 1, & \sqrt{-1}\\ \sqrt{-1}, & 1, & -\sqrt{-1}, & 1, \cdots & & & \cdots, & 1\\ 1, & \sqrt{-1}, & 1, & -\sqrt{-1}, 1, \cdots & & & \cdots, & 1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & & & \cdots & & & \\ 1 & \cdots & & & \cdots 1, & \sqrt{-1}, & 1, & -\sqrt{-1}\\ -\sqrt{-1}, & 1, & \cdots & & \cdots, & 1 & \sqrt{-1}, & 1\end{bmatrix}$$

$l\geq 2$，

$$（i，3）\ T(G_2^{(1)})=\begin{bmatrix}1, & -\sqrt{-1}, & 1\\ \sqrt{-1}, & -1, & -\sqrt{-1}\\ 1, & -\sqrt{-1}, & 1\end{bmatrix},$$

$$（i，4）\ T(A_2^{(2)})=\begin{pmatrix}1, & 1\\ \sqrt{-1}, & 1\end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{i}、5)\quad T(D_{l+1}^{(2)})=\begin{bmatrix} 1,\ -1,\quad 1,\quad \cdots \qquad\qquad \cdots,\quad 1 \\ \sqrt{-1},\quad 1,-\sqrt{-1},\quad 1,\cdots \qquad \cdots,\quad 1 \\ 1,\sqrt{-1},\quad 1,-\sqrt{-1},1,\cdots \qquad \cdots,\quad 1 \\ \\ 1,\qquad\qquad \cdots,1,\sqrt{-1},\quad 1,-\sqrt{-1} \\ 1,\qquad\qquad \cdots,\quad 1,-1,\quad 1 \end{bmatrix},$$

$$(\mathrm{i}、6)\quad T(C_2^{(1)})=\begin{bmatrix} 1,\ -\sqrt{-1},\quad 1 \\ -1,\quad 1,\ -1 \\ 1,\quad \sqrt{-1},\quad 1 \end{bmatrix},$$

$$(\mathrm{i}、7)\quad T(D_4^{(3)})=\begin{bmatrix} 1,\ -\sqrt{-1},\quad 1 \\ \sqrt{-1},\quad 1,\ \sqrt{-1} \\ 1,\quad \sqrt{-1},\quad 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) 当$X_N^{(k)}=D_l^{(1)}$ ($l\geq 4$)，$B_l^{(1)}$ ($l\geq 3$)，由于Dynkin图有分岔，$T(X_N^{(k)})$的取法在(i)规定的基础上稍加修改，规定：$k_{01}=k_{10}=-1$，特别当$X_K^{(k)}=D_l^{(1)}$时取$k_{l-1l}=k_{ll-1}-1$，其余k_{ij}取法如(i).

$$(\mathrm{ii},1)\quad T(D_l^{(1)})=\begin{bmatrix} 1,\ -1,-\sqrt{-1},\quad 1,\quad \cdots, \qquad\qquad \cdots,\quad 1 \\ -1,\quad 1,-\sqrt{-1},\quad 1,\quad \cdots \qquad\qquad \cdots,\quad 1 \\ \sqrt{-1},\sqrt{-1},\quad 1,-\sqrt{-1},\quad 1,\cdots \qquad\qquad \cdots,\quad 1 \\ 1,\quad 1,\quad \sqrt{-1},\quad 1,-\sqrt{-1},1,\quad \cdots, \qquad \cdots,\quad 1 \\ \\ 1,\quad \cdots \qquad \cdots,\ 1,\sqrt{-1},\quad 1,-\sqrt{-1},-\sqrt{-1} \\ 1,\quad \cdots \qquad\qquad \cdots,\quad 1,\sqrt{-1},\quad 1,\quad -1 \\ 1,\quad \cdots \qquad\qquad \cdots,\quad 1,\sqrt{-1},\quad -1,\quad 1 \end{bmatrix},$$

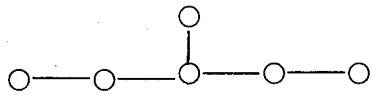
$$(\mathrm{ii}、2)\quad T(B_l^{(1)})=\begin{bmatrix} 1,\ -1,-\sqrt{-1},\quad 1,\quad \cdots, \qquad\qquad \cdots,\quad 1 \\ -1,\quad 1,-\sqrt{-1},\quad 1,\quad \cdots \qquad\qquad \cdots,\quad 1 \\ \sqrt{-1},\sqrt{-1},\quad 1,-\sqrt{-1},\quad 1,\cdots \qquad\qquad \cdots,\quad 1 \\ 1,\quad 1,\quad \sqrt{-1},\quad 1,-\sqrt{-1},1,\cdots \qquad\qquad \cdots,\quad 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ 1,\quad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots,1,\sqrt{-1},\quad 1,-\sqrt{-1},\quad 1 \\ 1,\quad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots\ 1,\sqrt{-1},\quad 1,-\sqrt{-1} \\ 1,\quad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots,\quad 1,\quad -1,\quad 1 \end{bmatrix}.$$

可利用公式(5)(6)(7)(8)(9)(10)直接验证$\tau_0\cdots\tau_l$的取法是适当的. ■

引理3.2 若A的Dynkin图以：$\cdots$——○⇐○为子图，则与它相应的正合列(✻)不是分裂的.

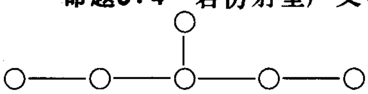
证 用反证法，假设正合列(✻)是分裂的. 适当编号可设$\cdots\underset{a_0}{○}$——$\underset{a_1}{○}\Leftarrow\underset{a_2}{○}\cdots$，并设与$\gamma_i$对应的$\rho_i=\tau(k_{i0},\ k_{i1},\ k_{i2},\ ✻,\ \cdots,\ ✻)\cdot\gamma_i^{ad}$. 由$\rho_2^2=\rho_1^2=1$ 得①$k_{21}^2k_{22}=-1$，②$k_{20}^2=1$，③$k_{10}^2k_{11}=-1$，④$k_{11}^2k_{12}^2=1$. 由(8.2)知：$(\gamma_1^{ad}\gamma_2^{ad})^4=\tau(-1,1,1,✻,\cdots,✻)$，且由$(\rho_1\rho_2)^4=1$得：$k_{10}^4\cdot k_{11}^4\cdot k_{12}^2\cdot k_{20}^4\cdot k_{21}^4\cdot k_{22}^2=-1$. 以①③④代入上式得$k_{20}^4=-1$，与②矛盾. ■

注 用引理3.2的方法同样可证$A_4^{(2)}$：○⇐○⇐○的正合列(✻)不是分裂的.

引理3.3 若A的Dynkin图以：为子图，则与它相应的正合列（＊）不是分裂的．

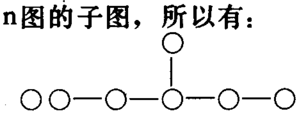
证 仿照引理3.2的证明． ■

观察§2中列举的全部仿射型Dynik图知道，除引理3.1列举的$X_N^{(k)}$之外的所有的Dynik图都分别满足引理3.2与引理3.3的条件．总结上述三个引理，得到：

命题3.4 若仿射型广义Cartan矩阵A的Dynkin图不以：○——○⇐○，○⇐○⇐○，，为子图，则与它相应的正合列（＊）是分裂的；反之不是分裂的． ■

当命题3.4的条件被满足时，$\mathrm{H}=(\ker\Phi\rtimes\widetilde{\mathscr{W}})\rtimes(\overline{\Gamma}\times\langle\omega\rangle)$，其中$\widetilde{\mathscr{W}}$与$\overline{\Gamma}$在$\Phi$下分别同构于Weyl群$\mathscr{W}$及Dynkin图自同构群$\Gamma$．又$\mathscr{W}\cong\mathring{\mathscr{W}}\rtimes T$，其中$\mathring{\mathscr{W}}=\langle\gamma_1,\cdots,\gamma_l\rangle$是有限型Weyl群，$T$是秩为$l$的自由Abel群（〔1〕Chap.6），此时H表成一些已知群的半直积．

因为任一有限维单李代数的Dynkin图都是某一个仿射型Dynkin图的子图，所以有：

推论3.5 若有限维单李代数的Dynkin图不以：○——○⇐○，，为子图，则与它相应的正合列（＊）是分裂的；反之不是分裂的． ■

满足推论3.5的有限型Dynkin图是：A_l（$l\geq1$），B_l（$l\geq2$），D_l（$l\geq4$），G_2．这时$\mathrm{H}=(\ker\rtimes\widetilde{\mathscr{W}})\rtimes\overline{\Gamma}$．其中$\widetilde{\mathscr{W}}$与$\overline{\Gamma}$在$\Phi$下分别与Weyl群$\mathscr{W}$及Dynkin图自同构群$\Gamma$同构．

§4．G的结构

设A是n阶广义Cartan矩阵，A可对称化，且秩$A=s$．

$\mathfrak{g}(A)=\mathfrak{g}'(A)\oplus\mathfrak{h}''$，其中$\mathfrak{g}'(A)=[\mathfrak{g}(A),\ \mathfrak{g}(A)]$，$\mathfrak{h}''\subseteq\mathfrak{h}$，且$\dim\mathfrak{h}''=n-s$．

取定$\mathfrak{h}''$中一组基$\{h_1,\cdots,h_{n-s}\}$，任取$c_1,\cdots,c_{n-s}\in\mathrm{C}$，这里C是$\mathfrak{g}(A)$的中心，$\dim\mathrm{C}=n-s$．定义$\mathfrak{g}(A)$上线性映射$i=i(c_1,\cdots,c_{n-s})$，使得$i(x)=x$，当$x\in\mathfrak{g}'(A)$，$i(h_j)=h_j+c_j$，$j=1,\cdots,n-s$．不难验证$i\in\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}(A)$，因而$i\in\mathrm{I}$．

反之，$i\in\mathrm{I}$时$i(h_j)=h_j+c_j$，$c_j\in\mathfrak{h}$，$j=1,\cdots,n-s$．$[h_k,e_j]=i([h_k,e_j])=[h_k+c_k,e_j]=[h_k,e_j]+[c_k,e_j]\Rightarrow[c_k,e_j]=0$，同理$[c_k,f_j]=0$，$j=1,\cdots,n$．又$c_k\in\mathfrak{h}$，所以$c_k\in\mathrm{C}$，$k=1,\cdots,n-s$．所以$i=i(c_1,\cdots,c_{n-s})$．所以$\mathrm{I}=\{i(c_1,\cdots,c_{n-s})\,|\,c_1,\cdots,c_{n-s}\in\mathrm{C}\}\cong\{M_{n-s}(\mathbf{C}),+\}$．

引理4.1 若Π连通，则$\mathrm{G}=\mathrm{H}\cdot\mathrm{I}$．

证 $w\in\mathrm{G}$，则$w^*\Pi$是Δ的基础系．存在$w'\in\mathscr{W}\{\pm1\}$使$w'w^*\Pi=\Pi$（见命题1.2），设$w'w^*(a_i)=a_{\rho(i)}$，ρ是$\{1,\cdots,n\}$上置换，$i=1,\cdots,n$．分别考虑过a_i的a_j链与过$a_{\rho(i)}$的$a_{\rho(j)}$链知：$\langle a_i,a_j^\vee\rangle=\langle a_{\rho(i)},a_{\rho(j)}^\vee\rangle$，$i,j=1,\cdots,n$．由$\Pi$的连通性知$|a_i|^2=|a_{\rho(i)}|^2$，$i=1,\cdots,n$（类似§2中讨论）．所以存在$\sigma\in\Gamma$使$\sigma w'w^*(a_i)=a_i$，$i=1,\cdots,n$（Witt扩张定理）．由命题1.6存在$v\in\mathrm{H}$使$\Phi(v)=\sigma\cdot w'$，则$vw\,\mathfrak{g}_a=\mathfrak{g}_{\Phi(v)w^*(a)}=\mathfrak{g}_a$，$\forall_a a\in\Delta$．设

$vw(e_i)=a_ie_i$，$vw(f_i)=b_if_i$，$i=1,\cdots,n$. 则$vw(a_i^{\vee})=[vw(e_i),\ vw(f_i)]=a_ib_ia_i$，$vw([a_i^{\vee},\ e_i])=vw(2e_i)=2a_ie_i$，另一方面$vw([a_i^{\vee},\ e_i])=[vw(a_i^{\vee}),\ vw(e_i)]=[a_ib_ia_i^{\vee},\ a_ie_i]=2a_i^2b_ie_i$，$\Rightarrow 2a_i^2b_i=2a_i\Rightarrow a_ib_i=1$，$i=1,\cdots,n$. 取$\tau=\tau(a_1^{-1},\ \cdots,\ a_n^{-1})\in\ker\Phi$，则$\tau vw(e_i)=e_i$，$\tau vw(f_i)=f_i$，$i=1,\cdots,n$. 所以$\tau vw(x)=x$，$\forall x\in {}'(A)$. 从而$\tau vw\in \mathrm{I}\Rightarrow w\in v^{-1}\tau^{-1}\mathrm{I}$，$\Rightarrow \mathrm{G}=\mathrm{H}\cdot\mathrm{I}$. ■

引理4.2 $\mathrm{I}\lhd\mathrm{G}$.

证 显然$\forall w\in\mathrm{G}$，$w\mathfrak{g}'(A)=\mathfrak{g}'(A)$. $\forall i\in\mathrm{I}$，$\forall x\in\mathfrak{g}'(A)$，则$w^{-1}iw(x)=w^{-1}w(x)=x$，所以$w^{-1}iw\in\mathrm{I}$. ■

命题4.3 当A是仿射型广义Cartan矩阵，则$\mathrm{G}=\mathrm{H}\ltimes\mathrm{I}$，且此时$\mathrm{I}\cong\{\mathbf{C},\ +\}$.

证 由引理2.5知$\mathrm{H}\cap\mathrm{I}=\{1\}$，然后利用前面引理4.1与引理4.2立得. ■

综合本文全部内容得到：当A是仿射型广义Cartan矩阵，且满足命题3.4条件时，

$$\mathrm{G}\cong((\ker\Phi\rtimes(\mathring{\mathscr{W}}\rtimes T))\rtimes(\overline{\Gamma}\times\langle\omega\rangle))\rtimes\mathrm{I}$$

表为一些已知群的半直积.

当A是有限型广义Cartan矩阵，且满足推论3.5条件时：$\mathrm{G}=\mathrm{H}=(\ker\Phi\times\widetilde{\mathscr{W}})\times\overline{\Gamma}$.

参 考 文 献

[1] V. G. Kac, Infinite dimensional Lie algebras, Birkhauser, 1983.

[2] R. V. Moody, Root systems of hyperbolic type, Advances in Mathematics, 33, 144—160 (1979).

[3] R. V. Moody and T. Yokonuma, Root systems and Cartan matrics, Can. J. Math., Vol. XXXIV, No, 1, 1982, pp63—79.

[4] C. K. Lim, A structure theorem on Weyl groups associated with generalized Cartan matrices, Nanta Math. 3(1986), 45—50.

On Certain Groups of Automorphisms of Affine Lie Algebras

Liu Lishi

Abstract

Let A be a symmetrizable generalized Cartan matrix, $\mathfrak{g}(A)$ the Kac-Moody algebra associated with A, $\mathfrak{h}$ a Cartan subalgebra of $\mathfrak{g}(A)$. In this paper, we discuss certain groups of automorphisms of $\mathfrak{g}(A)$. Especially, when A is of affine type, the group of automorphisms which left $\mathfrak{h}$ invariant is completely determined.