第10卷 第3期
1990年8月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.10 No.3
Aug. 1990

特 殊 模 的 对 偶 模*

丁 南 庆

（南京大学数学系）

一、引 言

设 R 是具有单位元的结合环，A 为左（酉）R-模，则其对偶模 $A^*=\mathrm{Hom}_R(A, R)$ 是右 R-模，依次可定义 $A^{**}=(A^*)^*$ 等等．如众所知，任意环 R 上每个有限生成投射模之对偶模是投射的，但是，即使在Noether环上，并非每个投射模之对偶模是投射的．例如：$F=\bigoplus\limits_1^{\infty}Z$ 是投射的 Z-模，但是 $F^*=\prod\limits_1^{\infty}Z$ 不是投射 Z-模（参阅[1]）．一个自然的问题就是：何时投射（平坦或内射）模之对偶模是投射（平坦或内射）的？本文主要讨论这个问题．

二、主 要 结 果

引理1 R 是左凝聚环 $\Leftrightarrow\forall f$：$M_1\to M_2$，其中 M_1 及 M_2 均是有限表现左 R-模，$\mathrm{Ker}f$ 是有限表现左 R-模．

证明 由[3]中定理4.1易证该引理成立．

命题2 设 R 是左、右凝聚环，若 A 为有限表现左（右）R-模，则 A^*，$\mathrm{Ext}_R^n(A, R)(n\geq 1)$ 均为有限表现右（左）R-模．

证明 设 A 为有限表现左 R-模，则有正合列

$$F_1\xrightarrow{f}F_0\xrightarrow{g}A\to 0\ ,$$

其中 F_1，F_0 均为有限生成自由左 R-模．由此得到正合列

$$0\to A^*\to F_0^*\xrightarrow{f^*}F_1^*\ ,$$

因有限生成自由模的对偶模仍是有限生成自由模，故 F_0^*，F_1^* 均是有限生成自由的，因而是有限表现的，又因 R 是右凝聚的，由引理1知，$A^*=\mathrm{Ker}f^*$ 是有限表现的．

令 $K=\ker g$，则有正合列

$$0\to K\xrightarrow{i}F_0\xrightarrow{g}A\to 0,$$

从而有正合列

$$0\to A^*\xrightarrow{g^*}F_0^*\xrightarrow{i^*}K^*\to\mathrm{Ext}_R^1(A, R)\to 0,$$

* 1988年9月5日收到．国家自然科学基金会资助项目．

令 $C=\mathrm{Im}\,i^*$，则 C 为有限生成的，且有正合列

$$0\to C\to K^*\to \mathrm{Ext}_R^1(A,\ R)\to 0, \qquad (*)$$

因 R 是左凝聚的，所以 K 是有限表现左 R-模，由前半部证明知，K^* 是有限表现的，由正合列$(*)$利用马掌引理（Horseshoe Lemma）易证 $\mathrm{Ext}_R^1(A,\ R)$ 是有限表现的．使用归纳法即得欲证．证毕．

引理 3　R 为左凝聚环⇔每个投射左 R-模之对偶模是平坦的．

证明　“⇒”设 P 为投射左 R-模，则有投射模 Q 使得

$$P\oplus Q=\oplus_R R,$$

于是，$P^*\oplus Q^*=\prod({}_RR)^*=\prod R_R$，因 R 是左凝聚的，由［2］或［3］知，$\prod R_R$是平坦的右 R-模，所以 P^*是平坦的(平坦模之直和项是平坦的)．

“⇐”欲证 R 是左凝聚的，由［2］或［3］知，只需证明任意多个R(作为右R-模)的直积 $\prod R_R$是平坦的．事实上，

$$\prod R_R=\prod({}_RR)^*=\mathrm{Hom}(\oplus_R R,\ R),$$

令 $F=\oplus_R R$，则 F 为投射左 R-模，故由假设知，F^* 是平坦的，所以 $\prod R_R=F^*$ 是平坦的．证毕．

命题 4　R 为左凝聚、右完全环⇔每个投射左 R- 模之对偶模是投射的．

证明　“⇒”设 P 为投射左 R- 模，因 R 是左凝聚的，由引理 3 知，P^*是平坦右 R- 模，因 R 是右完全的，由［4］中定理5.7 知，P^*是投射右 R- 模．

“⇐”欲证 R 为左凝聚、右完全环，由［4］中定理5.15知，只需证明：任意多个 R（作为右 R- 模)的直积 $\prod R_R$是投射的．事实上，

$$\prod R_R=\prod({}_RR)^*=\mathrm{Hom}(\oplus_R R,\ R)=(\oplus_R R)^*,$$

因　${}_RR$是投射左 R- 模，故由假设知，$(\oplus_R R)^*$是投射的，从而 $\prod R_R$是投射的．证毕．

推论 5　设 R 是左凝聚、左完全环，则平坦左 R- 模之对偶模是平坦的．反之，R 一定是左凝聚的．

证明　利用已知结果“R为左完全环⇔每个平坦左 R- 模是投射的”以及引理 3 即得．

定理 6　下列条件等价：

（1）R是QF(qusi-Frobenius)环．

（2）每个内射右 R- 模是无挠的（Torsionless)，每个平坦左 R-模之对偶模是投射的．

（3）每个内射右 R- 模是无挠的，每个投射左 R- 模之对偶模是投射的．

（4）每个内射右 R-模是无挠的，每个自由左 R-模之对偶模是投射的．

证明　（1）⇒（2）．因 R 是QF环，故由［5］知，每个内射右R-模是投射的，从而是无挠的．设M是一个平坦左 R- 模，因 QF环是右 Artin 环，从而是左完全的，故M是投射左 R- 模，又因QF环是左凝聚、右完全环，由命题 4 知，M^*是投射的．故（2）成立．

(2)⇒(3)⇒(4)显然．

(4)⇒(1)．设M是一个内射右 R- 模，则M^*是左 R- 模，故存在自由左 R- 模 F 使得序列

$$F\to M^*\to 0$$

是正合的．从而有正合列

$$0 \to M^{**} \to F^{*},$$

故M^{**}可看作F^{*}的子模，而由(4)知M是无挠的，所以M可看作M^{**}的子模，于是M可看作F^{*}的子模，又因M是内射的，故M是F^{*}的直和加项，而由(4)知F^{*}是投射的，故M是投射的．这就是说，每个内射右R-模是投射的，故由[5]知，R是QF环，即(1)成立．证毕．

命题7 设R是可换环，则下述条件等价：

(1) R是自内射环．

(2) 每个平坦模之对偶模是内射的．

(3) 每个投射模之对偶模是内射的．

证明 利用[1]中定理3.44及“$R^{*}=R$”即得．

命题8 设R是可换PF环，则对任何R-模 M，$fd(M)=id(M^{*})$．

证明 因R是PF环，故R是自内射的，所以由[1]中p.360知，$\forall R$-模M及A，整数$n>0$，有同构

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Tor}_n^R(M,A),R) \cong \mathrm{Ext}_R^n(A,\mathrm{Hom}_R(M,R)). \qquad (1)$$

设$fd(M)=n<\infty$，则对任何R-模A，有

$$\mathrm{Tor}_{n+1}^R(M,A)=0.$$

于是，由(1)知

$$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A,M^{*})=0,$$

从而，$id(M^{*})<n$，因此$id(M^{*})<fd(M)$．

反之，设$id(M^{*})=n<\infty$，则对任何R-模A，有

$$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A,M^{*})=0,$$

从而，由(1)知

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Tor}_{n+1}^R(M,A),R)=0,$$

因R是PF-环，所以R是上生成子，于是

$$\mathrm{Tor}_{n+1}^R(M,A)=0,$$

故$fd(M)<n$．因此，$fd(M)<id(M^{*})$．证毕．

推论9 若R是可换PF-环，则$\forall R$-模M，M是平坦模$\Leftrightarrow M^{*}$是内射模．

命题10 设R是自内射可换凝聚环，则内射模之对偶是内射的．

证明 设C是内射R-模，因R是凝聚环，对每个有限表现R-模A，由[1]中定理9.51易证有同构

$$\mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{Hom}_R(R,C),A) \cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}_R^1(A,R),C),$$

即

$$\mathrm{Tor}_1^R(C,A) \cong \mathrm{Hom}_R^1(\mathrm{Ext}_R^1(A,R),C), \qquad (*)$$

因R是自内射的，故对任何有限表现R-模A，有

$$\mathrm{Ext}_R^1(A,R)=0,$$

从而由$(*)$知

$$\mathrm{Tor}_1^R(C,A)=0,$$

于是，C是平坦的，再由命题7知，C^{*}是内射的．证毕．

定理11 设R是自内射可换凝聚环，则内射模之对偶模是平坦的．而且，若对R-模M，M^*的平坦性蕴含了M的内射性，则R一定是Noether环．

证明 设M是内射R-模，因R是可换凝聚环，利用R的自内射性，由[6]中定理1知，M^*是平坦的．定理前半部获证．

下面证R是Noether环．由[1]知，只需证明内射模之直和是内射的．为此设$M=\bigoplus_{i\in I}M_i$，其中每个M_i都是内射的，则$M^*=\prod_{i\in I}M_i^*$，我们已知M_i^*是平坦的，又因R是凝聚的，故由[2]或[3]知，M^*是平坦的，再由假设知，M是内射的，因此，R是Noether环．证毕．

定理12 设R是自内射可换凝聚环，则R是QF环$\Leftrightarrow$对每个R-模M，M是内射的当且仅当M^*是平坦的．

证明 "$\Leftarrow$"由定理11知结论成立．

"$\Rightarrow$"设M是内射模，则由定理11知，M^*是平坦的．现设M^*是平坦的，因R是QF环，则R是Noether环，且R是自内射的，故对任何有限生成模A，由[1]知，有同构

$$\mathrm{Tor}_1^R(M^*,A)\cong\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}_R^1(A,M),R),$$

由M^*的平坦性知，对任何有限生成R-模A，有

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}_R^1(A,M),R)\cong\mathrm{Tor}_1^R(M^*,A)=0.$$

即

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}_R^1(A,M),R)=0.$$

又因R是QF环，所以由[7]知，R是上生成子，因此

$$\mathrm{Ext}_R^1(A,M)=0,$$

从而

$$\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M)=0,\quad \forall I\lhd R,$$

所以，M是内射的．证毕．

参 考 文 献

[1] J.J. Rotman, An introduction to homological algebra, Academic Press, 1979.

[2] S.U. Chase, Trans. Amer. Math. Soc. 97(1960), 457—473.

[3] K.G. Choo. Bull. Mallaysian Math. Soc. (7)2(1984), 69—76.

[4] K.R. Goodearl, Ring theory—Nonsingular rings and modules, New York and Basel, 1976.

[5] C. Faith, Algebra Ⅱ, Ring Theory, Berlin- Heidelberg, New York.1976.

[6] E. Matlis, Canad. J.Math.34(1982), 1240—1244.

[7] D. A. R. Wallace, Modules and rings, Academic Press, 1982.

Dual Modules of Specific Modules

Ding Nanging

Abstract

In this paper, we making use of duality, characterized the left coherent and right perfect rings, the qusi-Frobenius rings, the Noetherian rings and the self-injective rings.