第10卷 第3期
1990年8月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.10 No.3
Aug. 1990

l^p上单胞移位的拟幂零性(Ⅰ)*

吕 方

(辽宁大学数学系，沈阳)

设$\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$是空间l^p $(1<p<\infty)$的通常的基，而$\{e_n'\}_{n=0}^{\infty}$是其共轭空间l^q的基．以下我们总设T是l^p上以$\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$为权序列的加权移位算子．不难证明：如果T是单胞的，则T的权皆非零．于是我们不妨设T的权皆为正实数．令L和L'是分别由$\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$和$\{e_n'\}_{n=0}^{\infty}$张成的线性流形，$a=\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$是一个正实数列．现在我们构造双线性映射$T^a: L\times L'\to l^1$使得

$$T^a[f,g']=\{a_n g'(T^n f)\}_{n=0}^{\infty},\quad (f,g')\in L\times L'.$$

对于T^a，我们定义

$$|T^a|_{n,\eta}=\inf\{\|T^a[e_0\, e_{k+n}']\|_1:\|T^a[e_k,e_{k+n}']\|_1\geqslant\eta\}.$$

于是我们有

引理1 如果存在非负整数n，$0<\eta<1$和正实数列$a=\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$使得$|T^a|_{n,\eta}=0$，则存在$\{n\}_{n=0}^{\infty}$的子序列$\{n_j\}_{j=0}^{\infty}$使得：对任何$f\in L$，恒有

$$\|T^a[e_{n_j},e_{n_j+n}']\|_1\geqslant\eta,\ \lim_{j\to\infty}\|T^a[f,e_{n_j+n}']\|_1=0.$$

引理2 如果存在正实数序列$a=\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$使得对任何$n\geqslant0$，$0<\eta<1$，恒有$|T^a|_{n,\eta}=0$，则对任何$f\in L$，$g'\in L'$，以及任何$m>0$，$\varepsilon>0$，都存在整数组$m<n_0<n_1<\cdots<n_m$和复数组$\{x_k\}_{k=0}^{m}$使得

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}|x_k|<\|T^a[f,g']\|_1$，

(ii) $\|T^a[f+u,g'+v']\|_1<\varepsilon$，

其中 $$u=\sum_{k=0}^{m}x_k^{\frac{1}{p}}e_{n_k},\quad v'=-\sum_{k=0}^{m}(x_k^{\frac{1}{p}})^{-}e_{n_k+k}'\ .$$

定理1 如果存在正实数列$a=\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$使得对任何$n\geqslant0$，$0<\eta<1$，都有$|T^a|_{n,\eta}=0$，则T是非单胞算子．

证明 反复利用引理2我们得到：存在$f\in l^p$和$g'\in l^q$使得

(i) $\displaystyle f=\sum_{k=0}^{\infty}a_k e_k$，$a_0\neq0$，$g'\neq0$，

(ii) $g'(T^n f)=0$，$n=0,1,\cdots$．

令$M=\bigvee_{n=0}^{\infty}\{T^n f\}$．由于$T$为单胞算子的充要条件是$\mathrm{Lat}(T)=\{\{0\},M_k,k=0,1,\cdots\}$，其中

* 1988年8月31日收到．

$$M_k=\{\sum_{n=1}^{\infty}x_n e_n \in l^p : x_n=0,\ \text{当}\ n<k\},\quad k>0.$$

由(i),(ii)可知：$M \neq M_k$，$k \geqslant 0$ 并且 $M \neq \{0\}$. 故 T 是非单胞算子. ■

下面我们令

$$r_2=\underline{\lim}_{n\to\infty}(w_0\cdots w_{n-1})^{\frac{1}{n}},\qquad R_2=\overline{\lim}_{n\to\infty}(w_0\cdots w_{n-1})^{\frac{1}{n}}.$$

于是我们有

引理 3 如果 $r_2>0$, 则 T 是非单胞算子.

证明 令 T^* 是 T 的共轭算子，则 T^* 是 l^q 上的后向加权移位算子，即

$$T^*e'_0=0,\ T^*e'_n=w_{n-1}e'_{n-1},\ n\geqslant 1.$$

再令 $x'_0=e'_0$，$x'_n=(w_0\cdots w_{n-1})^{-1}e'_n$，$n\geqslant 1$. 可以证明当 $|\lambda|<r_2$ 时，$f(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n x'_n \in l^q$，并且 $f(\lambda)$ 是 T^* 的特征向量. 于是知 T^* 是非单胞的，进而知 T 是非单胞的. ■

引理 4 如果 $R_2>0$, 则 T 是非单胞算子.

证明 由引理3，不妨设 $r_2=0$. 现在我们令 $a_n=R_2^{\ n}$，$n\geqslant 0$ 对任何 $0<\eta<1$, 由于 $r_2=0$, 故 $|T^a|_{0,\eta}=0$. 再经过一些计算，我们可以得到对任何 $m\geqslant 1$, $0<\eta<1$, 都有 $|T^a|_{m,\eta}=0$. 由定理1，T 是非单胞算子. ■

定理 2 如果 T 是单胞算子，则 T 是拟幂零的.

证明 假设 T 不是拟幂零的，则 T 的谱半径 $r>0$. 我们考虑 T 在Calkin代数中的自然同态象 $\pi(T)$. 可以证明 $\pi(T)$ 的谱半径等于 r，并且

$$\|\pi(T^m)\|=\overline{\lim}_{j\to\infty}\|T^m e_j\|,\quad m=0,1,\cdots.$$

令 $a_n=r^{\ n}$，$n\geqslant 0$. 由于对任何 $m\geqslant 0$,

$$\overline{\lim}_{j\to\infty}\|T^a[e_j,e'_{j+m}]\|_1=\overline{\lim}_{j\to\infty}\frac{\|T^m e_j\|}{r^m}=\frac{\|\pi(T^m)\|}{r^m}\geqslant 1,$$

而

$$\lim_{j\to\infty}\|T^a[e_0,e'_{j+m}]\|_1^{\frac{1}{k+m}}=\frac{R_2}{r}\quad ,$$

再据引理4, $R_2=0$, 故对任何 $0<\eta<1$, 都有 $|T^a|_{m,\eta}=0$. 由定理1，T 是非单胞算子. 矛盾！由此得 T 是拟幂零的. ■

定理 3 $l^p(1<p<\infty)$ 上的任何单胞双边加权移位算子都是拟幂零的.

证明 设 T 是 l^p 上以 $\{w_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 为权序列的双边加权移位算子. 令

$$M_+=\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n e_n \in l^p : x_n=0,\ \text{当}\ n<0\},$$

$$M_-=\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n e_n \in l^p : x_n=0,\ \text{当}\ n\geqslant 0\}.$$

再定义 $T_i\in B(l^p)$ 为:

$$T_1e_n=0,\ n<0,\qquad T_1e_n=w_ne_{n+1},\quad n\geqslant 0,$$
$$T_2e_n=0,\ n\geqslant 0,\qquad T_2e_n=w_ne_{n+1},\quad n<0.$$

于是有$T=T_1+T_2$。由T的单胞性可知T_i($i=1,2$)都是单胞的(此时将T_1和T_2看成是M_+和M_-上移位算子)。由定理2可得T_i($i=1,2$)都是拟幂零的,进而可得T是拟幂零的。 ■

注 对l^1上的单胞移位算子,我们在[1]证明了相应的定理2和定理3的结果。对于l^∞上加权移位算子,我们证明了l^∞上不存在单胞移位算子。

作者衷心感谢刘隆复教授的热情指导。

参考文献

[1] 吕方,l^p空间上单胞移位的拟幂零性(II),辽宁大学学报,待发表。

[2] Shields, A. L., Weighted shift operators and analytic fnnction theory, Topics in Operator Theory, 49—128, A. M. S., Providence, 1974.

[3] 关肇直,张恭庆,冯德兴,线性泛函分析入门,114—119,上海科学技术出版社,1985.

Quasinilpotency of Unicellular Weighted Shifts on l^p (I)

Lü Fang

(Dept. Math., Liaoning University, Shenyang)

Abstract

Let T denote a (unilateral, bilateral) weighted shift operator on any l^p for $1<p<\infty$. In this paper we show that if T is unicellular, T is quasinilpotent. This answers a question of A. L. Shields[2].