第10卷 第3期
1990年8月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.10 No.3
Aug. 1990

联合最佳逼近*

李江波

（浙江丽水师范专科学校）

摘要 本文研究了二元函数用紧Hausdorff空间上的连续函数集的联合逼近问题，建立了包括特征定理、唯一性定理、强唯一性定理和de la Vallée Poussin定理在内的Chebyshev逼近理论．给出了求解最佳逼近元的Remes型第一算法和两种一般的简化方法．

1．引言

设X是紧Hausdorff空间，$C(X)$是X上所有实值连续函数所成的空间，其上定义Chebyshev范数：

$$\|g\|:=\max\{|g(x)|:x\in X\},\ \forall g\in C(X)$$

设(Y,Σ,μ)是有限测度空间（不失一般性，可以假设$\mu(Y)=1$），$f(x,y):X\times Y\to\mathbf{R}$满足对函数族$\{f(x,y):y\in Y\}$是等度连续，对固定的$x$，$f(x,y)$在$Y$上$P(\geqslant 1)$次$\mu$可积，记这样的函数之全体为$\mathbf{F}$．

设G是$C(X)$中的非空子集，考虑如下逼近问题，求$g^*\in G$使

$$\max_{x\in X}\left(\int_Y|f(x,y)-g^*(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\max_{x\in X}\left(\int_Y|f(x,y)-g(x)|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\qquad(1.1)$$

对一切$g\in G$成立．此时称g^*是f在G中的（联合）最佳逼近元．

特别地，当Y是有限集和无限可数集时，逼近问题（1.1）可化为通常的“和”范数意义下的联合最佳逼近问题[1—4]．

本文对逼近问题（1.1）进行了较为系统的研究，得到了满意而丰富的结果，建立了特征定理（包括Kolmogoroff 型特征定理，0属于凸包型特征定理和Chebyshev交错型定理）、唯一性定理、强唯一性定理和de la Vallée Poussin定理．同时也给出了求解最佳逼近元的Remes型第一算法和两种一般的简化方法．

2．存在定理和特征定理

首先，我们指出利用通常的紧性论证法，不难证明如下的存在定理

存在定理 设G是$C(X)$中的非空紧子集，则对任意的$f\in\mathbf{F}$，f在G中的联合最佳逼近必存在．

为了下文叙述方便，我们引入如下记号：G是$C(X)$中的非空子集，$g^*\in G$，$x\in X$．令

* 1988年9月16日收到．

$$E_{g^*}(x)=\left(\int_Y |f(x,y)-g^*(x)|\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|E_{g^*}\|=\max_{x\in X} E_{g^*}(x)$$

$$X_{g^*}=\{x\in X:\ E_{g^*}(x)=\|E_{g^*}\|\}$$

$$F_{g^*}(x)=\int_Y |f(x,y)-g^*(x)|^{p-1}\operatorname{sgn}(f(x,y)g^*(x))\,\mathrm{d}\mu$$

$$Z_x(f-g^*)=\{y\in Y:\ f(x,y)=g^*(x)\}$$

$$X_0=\{x\in X_{g^*}:\ F_{g^*}(x)=0\}$$

以后，凡涉及到有$F_{g^*}(x)$的结果，如无特别指出，均假设当$p=1$时，对任意$x\in X_{g^*}$，$\mu(Z_x(f-g^*))=0$。

引理2.1 设$\{g_\lambda\}\subset G$，$(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$，$g_0=g^*$。如果$g_\lambda(x)$作为$x$，$\lambda$的函数在$X\times\{0\}$上连续，则对任意$x\in X_{g^*}$，$\{x_n\}\subset X_{g^*}$，$\{\lambda_n\}\subset[0,1]$，当$x_n\to x$，$\lambda_n\to 0\ (n\to\infty)$时，必有

$$\lim_{n\to\infty} F_{g_{\lambda_0}}(x_n)=F_{g^*}(x)$$

即$F_{g_\lambda}(x)$作为x，λ的函数，在$X_{g^*}\times\{0\}$上连续，特别地$F_{g^*}(x)$是X_{g^*}上的连续函数。

证明 对任意$y\in Y$，记

$$\psi_n(y)=|f(x_n,y)-g_{\lambda_n}(x_n)|^{p-1}\operatorname{sgn}(f(x_n,y)-g_{\lambda_n}(x_n))$$

$$\psi(y)=|f(x,y)-g^*(x)|^{p-1}\operatorname{sgn}(f(x,y)-g^*(x))$$

首先证明

$$\psi_n(y)\to\psi(y)\quad \text{a.e于}Y \tag{2.1}$$

如果$p=1$，由于对任意$x\in X_{g^*}$，$\mu(Z_x(f-g^*))=0$，而当$y\in Y/(Z_x(f-g^*))$时，$f(x,y)\neq g^*(x)$。不失一般性，设$f(x,y)-g^*(x)>0$，由于$g_{\lambda_n}(x_n)\to g^*(x)\ (n\to\infty)$，且$f(x,y)$关于$x$连续，故当$n$充分大时，有

$$f(x_n,y)-g_{\lambda_n}(x_n)>0$$

于是，当n充分大时

$$\operatorname{sgn}(f(x_n,y)-g_{\lambda_n}(x_n))=1=\operatorname{sgn}(f(x,y)-g^*(x))$$

即(2.1)成立。

当$p>1$时，(2.1)是显然的。

现在，由于$\mu(Y)<+\infty$，故由〔5.p138 定理4〕知，$\{\psi_n\}$在Y上依测度收敛到$\psi(y)$，再由控制收敛定理即得所证。

引理2.2 设$\widetilde{X}$是X的任一紧子集，如果对g，$g^*\in G$有$E_g(x)\leqslant(<)E_{g^*}(x)$，$\forall x\in\widetilde{X}$，则

$$(g(x)-g^*(x))F_{g^*}(x)\geqslant(>)0\quad\forall x\in\widetilde{X}.$$

证明 设$x\in\widetilde{X}$任意，则

$$\begin{aligned}E^p_{g^*}(x)&=\int_Y |f(x,y)-g^*(x)|^{p-1}(f(x,y)-g^*(x))\operatorname{sgn}(f(x,y)-g^*(x))\,\mathrm{d}\mu\\&=\int_Y |f(x,y)-g^*(x)|^{p-1}(f(x,y)-g(x))\operatorname{sgn}(f(x,y)-g^*(x))\,\mathrm{d}\mu\\&\quad+(g(x)-g^*(x))F_{g^*}(x)\\&\leqslant(E_{g^*}(x))^{\frac{p}{q}}E_g(x)+(g(x)-g^*(x))F_{g^*}(x)\qquad\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)\end{aligned}$$

如果$E_{g^*}(x)=0$，则$E_g(x)=0$，此时结论为真。假设$E_{g^*}(x)\neq 0$，上式两边同乘$(E_{g^*}(x))^{-\frac{p}{q}}$得

$$E_{g^*}(x) < E_g(x) + (g(x) - g^*(x))F_{g^*}(x) \quad (E_{g^*}(x))^{-\frac{p}{q}}$$

再由假设，即得所证.

于是，我们可得如下特征定理

定理2.1 设G是$C(X)$中的非空凸子集，则$g^*\in G$是f在G中的最佳逼近，当且仅当不存在$g\in G$使

$$E_g(x) < E_{g^*}(x), \quad \forall x\in X_{g^*}$$

证明 充分性是显然的. 下证必要性，假设存在$g\in G$使

$$E_g(x) < E_{g^*}(x), \quad \forall x\in X_{g^*} \tag{2.2}$$

易知，对任意$r\in G$，$E_r(x)$关于x连续且对固定的x是r的凸函数. 由于X_{g^*}紧，故由(2.2)知存在开集$U\supset X_{g^*}$使

$$E_g(x) < E_{g^*}(x), \quad \forall x\in U \tag{2.3}$$

由于G凸，故$g_\lambda = (1-\lambda)g^* + \lambda g\ (0<\lambda<1)\in G$且由(2.3)知对任意$x\in U$，$g^*(x)\neq g(x)$. 于是对任意$x\in U$，当$0<\lambda<1$时，$g_\lambda(x)$介于$g^*(x)$，$g(x)$所成的开区间之间，由于$E_r(x)$的凸性 知$E_{g_\lambda}(x)$必满足

$$E_{g_\lambda}(x) < \max\{E_g(x), E_{g^*}(x)\} \leqslant E_{g^*}(x) \leqslant \|E_{g^*}\|, \quad x\in U, \quad 0<\lambda<1 \tag{2.4}$$

现令$V = X\setminus U$，如果$V=\varnothing$，则(2.3)说明g^*不是最佳逼近. 假设$V\neq\varnothing$，令$\eta = \|E_{g^*}\| - \max\limits_{x\in V} E_{g^*}(x)$，因$V$紧，$E_{g^*}(x)$连续且$V\cap X_{g^*} = \varnothing$，故$\eta>0$，因此可选$\lambda_0$，$0<\lambda_0<1$，使$\|g_{\lambda_0} - g^*\| < \eta$. 则当$x\in V$时有

$$\begin{aligned} E g_{\lambda_0}(x) &= \left(\int_Y |f(x,y) - \varphi_{\lambda_0}(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\ &< \left(\int_Y |f(x,y) - g^*(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + |g_{\lambda_0}(x) - g^*(x)| \\ &< \|E_{g^*}\| - \eta + \eta = \|E_{g^*}\| \end{aligned}$$

结合(2.4)即知

$$E g_{\lambda_0}(x) < \|E_{g^*}\|, \qquad \forall x\in X$$

再由$E g_{\lambda_0}(x)$的连续性及X的紧性，即知g^*不是f的最佳逼近

定理2.2(Kolmogoroff型特征定理) 设G是$C(X)$的非空凸子集，则g^*是f的最佳逼近当且仅当对任意$g\in G$有

$$\inf_{x\in X_{g^*}} (g(x) - g^*(x))F_{g^*}(x) \leqslant 0 \tag{2.5}$$

证明 如果另有$g\in G$使$\|E_g\| < \|E_{g^*}\|$，则$E_g(x) < E_{g^*}(x)$，$\forall x\in X_{g^*}$. 由引理2.2，$(g(x) - g^*(x))F_{g^*}(x) > 0$. $\forall x\in X_{g^*}$. 由F_{g^*}在X_{g^*}上的连续性及X_{g^*}的紧性，得出与(2.5)矛盾.

现在，假设存在$g\in G$使$\inf\limits_{x\in X_{g^*}} (g(x) - g^*(x))F_{g^*}(x) > 0$. 记$g_\lambda = g^* + \lambda(g - g^*)$，由于$(g(x) - g^*(x))F_{g^*}(x) > 0$，$\forall x\in X_{g^*}$. 故由$F_{g_\lambda}(x)$的连续性(引理2.1)及$X_{g^*}$的紧性，知存在$0<\lambda_0<1$使$(g(x) - g^*(x))F g_{\lambda_0}(x) > 0$，$\forall x\in X_{g^*}$. 于是对任意$x\in X_{g^*}$有

$$\begin{aligned} E^p_{g_{\lambda_0}}(x) &= \int_Y |f(x,y) - g_{\lambda_0}(x)|^{p-1}(f(x,y) - g_{\lambda_0}(x))\,\mathrm{sgn}(f(x,y) - g_{\lambda_0}(x)\,d\mu \\ &= \int_Y |f(x,y) - g_{\lambda_0}(x)|^{p-1}(f(x,y) - g^*(x))\,\mathrm{sgn}(f(x,y) - g_{\lambda_0}(x))\,d\mu \\ &\quad + (g^*(x) - g_{\lambda_0}(x))F_{g_{\lambda_0}}(x) \end{aligned}$$

$$< \int_Y |f(x,y)-g_{\lambda_0}(x)|^{p-1}(f(x,y)-g^*(x))\operatorname{sgn}(f(x,y)-g_{\lambda_0}(x))\mathrm{d}\mu$$
$$\leqslant \left(\int_Y |f(x,y)-g_{\lambda_0}(x)|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_Y |f(x,y)-g^*(x)|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \quad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$$
$$= (E_{g_{\lambda_0}}(x))^{\frac{p}{q}} E_{g^*}(x)$$

两边同乘$(E_{g_{\lambda_0}}(x))^{-\frac{p}{q}}$(当 $E_{g_{\lambda_0}}(x)=0$时，下面不等式显然成立)得

$$E_{g_{\lambda_0}}(x) < E_{g^*}(x), \qquad \forall x\in X_{g^*}$$

再由定理2.1 知g^*不是最佳逼近.

推论2.1 如果G是$C(X)$的子空间，则$g^*\in G$是f的最佳逼近当且仅当对一切$g\in G$成立

$$\inf_{x\in X_{g^*}} g(x)F_{g^*}(x)\leqslant 0 .$$

下面，我们假设$G=\operatorname{span}\{g_1,\cdots,g_n\}$是$C(X)$中的$n$维子空间.

定理2.3 设$g^*\in G$，如果$X_0\neq\varnothing$，则g^*是f的最佳逼近.

这可由推论2.1得出.

定理2.4 (0属于凸包型定理) 设$g^*\in G$，则g^*是f的最佳逼近当且仅当 $0\in \operatorname{Conv}\{F_{g^*}(x)\hat{x}: x\in X_{g^*}\}$，其中Conv表示凸包. $\hat{x}=(g_1(x),\cdots,g_n(x))$.

证明 必要性. 如果$0\notin\operatorname{Conv}\{F_{g^*}(x)\hat{x}: x\in X_{g^*}\}$. 由于$X_{g^*}$紧，故由线性不等式定理〔6,P24〕，存在$G$中元$g$使$F_{g^*}(x)g(x)>0$, $\forall x\in X_{g^*}$. 由$F_{g^*}(x)$，$g(x)$在X_{g^*}上连续且X_{g^*}紧，故

$$\inf_{x\in X_{g^*}} F_{g^*}(x)g(x)>0.$$

从而g^*不是f之最佳逼近(推论2.1).

充分性. 如果g^*不是f之最佳逼近，则存在$g\in G$使$F_{g^*}(x)\cdot g(x)>0$, $\forall x\in X_{g^*}$. 由于X_{g^*}紧，由线性不等式定理〔6,P24〕知

$$0\notin\operatorname{Conv}.\{F_{g^*}(x)\hat{x}: x\in X_{g^*}\}.$$

利用定理2.4容易推出如下的极符号差型定理.

定理2.5(极符号差型定理) 设$X_0=\varnothing$，则$g^*\in G$是f的最佳逼近，当且仅当存在以$s=\{x_1,\cdots,x_r\}\subset X_{g^*}$为支柱的极符号差$\sigma(x)$使$r\leqslant n+1$且$\operatorname{sgn}F_{g^*}(x_i)=\sigma(x_i), i=\overline{1,r}$. (注：极符号差的定义见〔7,P28〕).

证明 由定理2.4, g^*是f的最佳逼近当且仅当存在$x_1,\cdots,x_r\in X_{g^*}$，数$\theta_1,\cdots,\theta_r>0$使$r\leqslant n+1$且

$$\sum_{i=1}^r\theta_i=1, \qquad \sum_{i=1}^r F_{g^*}(x_i)g(x_i)=0, \qquad \forall g\in G.$$

由于$X_0=\varnothing$，故$F_{g^*}(x_i)\neq 0$, $i=\overline{1,r}$, 则从极符号差的定义知，存在以$s=\{x_1,\cdots,x_r\}$为支柱的极符号差$\sigma(x)$使

$$\operatorname{sgn}F_{g^*}(x_i)=\sigma(x_i), \quad i=\overline{1,r}.$$

特别地，如果$X\subset[a,b]$至少含有$n+1$个点，G是$C(X)$中的n维Haar子空间. 则有

定理2.6(Chebyshev交错型定理) 设$g^*\in G$，如果$X_0=\varnothing$，则g^*是f的最佳逼近当且

仅当存在X_{g^*}中的$n+1$个有序点$x_1<x_2<\cdots<x_{n+1}$使

$$F_{g^*}(x_i)F_{g^*}(x_{i+1})<0,\quad i=\overline{1,n}.$$

证明 由〔7, pp36—37〕和定理2.5得出.

3. 唯一性定理及其它定理

定理3.1（de la Vallee Ponssin定理） 设$G=\mathrm{span}\{g_1,\cdots,g_n\}$是$C(X)$的$n$维子空间，$\widetilde{X}$是$X$中的任一非空紧子集且至少含有$n+1$个点．如果$0\in\mathrm{Conv}\{F_{g^*}(x)\hat{x}:\ x\in\widetilde{X}\}$则

$$\inf\{\|E_g\|:\ g\in G\}\geqslant\min\{E_{g^*}(x):\ x\in\widetilde{X}\}.$$

证明 假设不然，即存在$g\in G$使$\|E_g\|<\min\{E_{g^*}:x\in\widetilde{X}\}$，从而$E_g(x)<E_{g^*}(x)$，$\forall x\in\widetilde{X}$．由引理2.2，$(g(x)-g^*(x))F_{g^*}(x)>0$．$\forall x\in\widetilde{X}$．

另一方面，由于$0\in\mathrm{Conv}\{F_{g^*}(x)\hat{x}:\ x\in\widetilde{X}\}$，由Carathédory定理〔6, p22〕，存在$x_1,\cdots,x_k\in\widetilde{X}$，数$\theta_1,\cdots,\theta_k>0$及$k\leqslant n+1$且

$$\sum_{i=1}^{k}\theta_i=1,\qquad \sum_{i=1}^{k}\theta_iF_{g^*}(x_i)\hat{x}_i=0.$$

此即

$$\sum_{i=1}^{k}F_{g^*}(x_i)\overline{g}(x_i)=0,\quad \forall\overline{g}\in G.$$

但若取$\overline{g}=g-g^*$则又有

$$\sum_{i=1}^{k}\theta_iF_{g^*}(x_i)\overline{g}(x_i)>0$$

矛盾．

定理3.2（唯一性定理） 设X至少含有$n+1$个点，G是$C(X)$中的n维Haar子空间．g^*是f的最佳逼近，如果$X_0=\varnothing$，则g^*是f的唯一最佳逼近．

事实上，我们有更强的结果．

定理3.3（强唯一性定理） 在定理3.2的假设下，必存在常数$r>0$，及对任意$g\in G$有

$$\|E_g\|\geqslant\|E_{g^*}\|+r\|g-g^*\|$$

即此时，g^*是f在G中的强唯一最佳逼近．

证明 若$\|E_{g^*}\|=0$，取$r=1$即可．现设$\|E_{g^*}\|>0$，由定理2.4，$0\in\mathrm{Conv}\{F_{g^*}(x)\hat{x}:x\in X_{g^*}\}$，此即，存在$x_1,\cdots,x_k\in X_{g^*}$，数$\theta_1,\cdots,\theta_k>0$及$k\leqslant n+1$且

$$\sum_{i=1}^{k}\theta_iF_{g^*}(x_i)g_j(x_i)=0.\quad j=\overline{1,n}.$$

由Haar条件知$k=n+1$．设$\overline{g}\in G$，$\|\overline{g}\|=1$，则

$$\sum_{i=1}^{k}\theta_iF_{g^*}(x_i)\overline{g}(x_i)=0.$$

再由Haar条件及$X_0=\varnothing$，数$F_{g^*}(x_i)\overline{g}(x_i)$不全为0．又$\theta_i>0$，故$\max\limits_i F_{g^*}(x_i)\overline{g}(x_i)>0$，从而

$$r=\|E_{g^*}\|^{1-p}\min_{\|\overline{g}\|=1}\max_i F_{g^*}(x_i)\overline{g}(x_i)>0$$

现设$g\in G$，如果$g=g^*$，结论成立．反之，令$\overline{g}=(g^*-g)/\|g-g^*\|$，则$\|\overline{g}\|=1$，故存在$i$，使$F_{g^*}(x_i)\overline{g}(x_i)\geqslant r\|E_{g^*}\|^{p-1}$，于是

$$\|\dot{E}_{g^*}\| + r\|g - g^*\|$$
$$\leqslant \|E_{g^*}\| + \|E_{g^*}\|^{1-p}F_{g^*}(x_i)(g^*(x_i) - g(x_i))$$
$$= \|E_{g^*}\| + \|E_{g^*}\|^{1-p}\int_Y |f(x_i, y) - g^*(x_i)|^{p-1}(g^*(x_i) - g(x_i))\mathrm{sgn}(f(x_i, y) - g^*(x_i))\mathrm{d}\mu$$
$$= \|E_{g^*}\| + \|E_{g^*}\|^{1-p}\int_Y |f(x_i, y) - g^*(x_i)|^{p-1}(g^*(x_i) - f(x_i, y))\mathrm{sgn}(f(x_i, y) - g^*(x_i))\mathrm{d}\mu$$
$$+ \|E_{g^*}\|^{1-p}\int_Y |f(x_i, y) - g^*(x_i)|^{p-1}(f(x_i, y) - g(x_i))\mathrm{sgn}(f(x_i, y) - g^*(x_i))\mathrm{d}\mu$$
$$\leqslant \|E_{g^*}\|^{1-p}\int_Y |f(x_i, y) - g^*(x_i)|^{p-1}|f(x_i, y) - g(x_i)|\mathrm{d}\mu$$
$$\leqslant \|E_{g^*}\|^{1-p}\|E_{g^*}\|^{\frac{p}{q}}E_g(x_i) \leqslant \|E_g\| \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$$

即对任意$g \in G$有

$$\|E_{g^*}\| + r\|g - g^*\| \leqslant \|E_g\|.$$

最后我们来给出求解最佳逼近元的方法.

设G是$C(X)$的n维线性子空间，$G = \mathrm{span}\{g_1, \cdots, g_n\}$. 首先我们给出Remes型第一算法法. 对$g \in G$，记$\Delta(g) = \|E_g\|$.

算法描述 选取初始有限集$X_1 \subset X$，满足条件：向量集$\{\hat{x} = (g_1(x), \cdots, g_n(x): x \in X_1\}$具有$n$秩. 第$k$步，已知$X$的有限子集$X_k$，选择$\overline{g}_k \in G$使泛函$\Delta_k(g) = \max\limits_{x \in X_k} E_g(x)$在$G$中达到极小(由存在定理,这是可能的)，于是$\Delta_k(\overline{g}_k) = \inf\limits_{g \in G}\Delta_k(g)$. 再选取点$x_k \in X$使函数$E_{\overline{g}_k}(x)$在$X$上达极大，则$E_{\overline{g}_k}(x_k) = \Delta(\overline{g}_k)$. 令$X_{k+1} = X_k \cup \{x_k\}$，然后重新开始.

定理3.4(收敛定理) $\Delta_k(\overline{g}_k) \uparrow E(f)$. 同时$\{\overline{g}_k\}$有界且每个极限点$\overline{g}$都使$\Delta(\overline{g}) = E(f)$. 这里$E(f) = \inf\limits_{g \in G}\|E_g\|$.

证明 首先证明$\{\overline{g}_k\}$有界. 假设不然，不失一般性，$\|\overline{g}_k\| \to \infty$，由$X_1$的取法,知$\|\overline{g}_k\|_{X_k} = \max\limits_{x \in X_1}|\overline{g}_k(x)| \to \infty$[8]，再因$X_1 \subset X_k$，$\forall k$，故$\|\overline{g}_k\|_{X_k} \to \infty$. 于是$\|E_{\overline{g}_k}\|_{X_k} \to \infty$. 另一方面，由于$\Delta_k(\overline{g}_k) = \inf\limits_{g \in G}\Delta_k(g)$，设$g^*$是$f$在$G$中的最佳逼近，则

$$\|E_{\overline{g}_k}\|_{X_k} = \Delta_k(\overline{g}_k) \leqslant \Delta_k(g^*) \leqslant \|E_{g^*}\| < \infty$$

矛盾. 故$\{\overline{g}_k\}$有界，又G是有限维子空间，故$\{\overline{g}_k\}$有收敛子序列.

由于$X_k \subset X_{k+1}$，故$\Delta_k(g) \leqslant \Delta_{k+1}(g) \leqslant \Delta(g)$，从而

$$\Delta_k(g_k) \leqslant \Delta_{k+1}(g_{k+1}) \leqslant \Delta(g^*)$$

因此$\Delta_k(g_k)$单调增加有上界，故必收敛. 我们证明$\Delta_k(g_k) \to \|E_{g^*}\| = E(f)$.

设$\{\overline{g}_k\}$的一极限点为$\overline{g}$，必要时取子列. 假设$\{\overline{g}_k\}$在X上一致收敛到$\overline{g}$，于是

$$\|E_{g^*}\| \leqslant \Delta(\overline{g}) = \|\int_Y |f(x, y) - \overline{g}(x)|^p \mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{p}}\|$$
$$\leqslant \|(\int_Y |f(x, y) - \overline{g}_k(x)|^p \mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{p}}\| + \|g_k - \overline{g}\|$$
$$= E_{\overline{g}_k}(x_k) + \|g_k - \overline{g}\|$$
$$\leqslant E_{\overline{g}_{k+1}}(x_k) + \|g_{k+1} - g_k\| + \|g_k - \overline{g}\|$$
$$\leqslant \Delta_{k+1}(\overline{g}_{k+1}) + \|g_{k+1} - g_k\| + \|g_k - \overline{g}\|$$

令$k\to\infty$得

$$\|E_{g^*}\|\leqslant\lim_{k\to\infty}\Delta_{k+1}(\overline{g}_{k+1})$$

又$\lim\limits_{k\to\infty}\Delta_k(\overline{g_k})\leqslant\|E_{g^*}\|$，故

$$\Delta_k(\overline{g_k})\uparrow\|E_{g^*}\|=E(f).$$

定理3.5 设 i）G是$C(X)$中的有限维子空间；ii）Y_k，$k=1,2,\cdots$，是Y的可测子列，满足$Y_1\subset Y_2\subset\cdots\subset Y$且$\mu(Y-Y_k)\to0$；iii）$\overline{g_k}$，满足

$$\max_{x\in X}\left(\int_{Y_k}|f(x,y)-\overline{g_k}(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}=\inf_{g\in G}\max_{x\in X}\left(\int_{Y_k}|f(x,y)-\overline{g_k}(x)|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

则$\{g_k\}$存在在X上一致收敛的子列，且此子列的极限函数是f在G中的最佳逼近元.

证明 由存在定理，f在G中的最佳逼近存在，设为g^*. 于是

$$\begin{aligned}\mu(Y_k)\|\overline{g_k}\|&\leqslant\left\|\left(\int_{Y_k}|f(x,y)-\overline{g_k}(x)|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}+\left\|\left(\int_{Y_k}|f(x,y)|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right\|\right.\\&\leqslant\left\|\left(\int_{Y_k}|f(x,y)-g^*(x)|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right\|+\left\|\left(\int_{Y_k}|f(x,y)|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right\|\\&\leqslant\|E_{g^*}\|+\left\|\left(\int_Y|f(x,y)|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right\|<\infty\end{aligned}$$

且$\mu(Y_k)\to\mu(Y)>0$，故知$\{\|\overline{g_k}\|\}$有界，又G是有限维子空间，故$\{\overline{g_k}\}$有在X上一致收敛的子列. 设其收敛子列的极限函数为$\overline{g}$.

下面证明$\|E_{\overline{g}}\|=\|E_{g^*}\|$. 显然$\|E_{\overline{g}}\|\geqslant\|E_{g^*}\|$. 其次，不失一般性，设$\{\overline{g_k}\}$在$X$上一致收敛到$\overline{g}$，由于

$$\begin{aligned}\|E_{g^*}\|&\geqslant\left\|\left(\int_{Y_k}|f(x,y)-g^*(x)|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right\|\\&\geqslant\left\|\left(\int_{Y_k}|f(x,y)-\overline{g_k}(x)|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right\|\\&\geqslant\left\|\left(\int_{Y_k}|f(x,y)-\overline{g}(x)|^p\mathrm{d}\mu\right\|-\|\overline{g_k}-g\|,\right.\qquad\forall k\end{aligned}\tag{3.1}$$

由于$\mu(Y-Y_k)\to0$（$k\to\infty$）故对任意$x\in X$，由积分之连续性知

$$\left(\int_{Y_k}|f(x,y)-\overline{g}(x)|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\to\left(\int_Y|f(x,y)-\overline{g}(x)|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\quad(k\to\infty)\tag{3.2}$$

又$\left\{\left(\int_{Y_k}|f(x,y)-\overline{g}(x)|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$单调，故由Dini定理知（3.2）在$X$上一致成立，注意到$\|\overline{g}_k-g\|\to0$（$k\to\infty$）. 于是在（3.1）中令$k\to\infty$即得

$$\|E_{g^*}\|\geqslant\|E_{\overline{g}}\|$$

所以$\|E_{\overline{g}}\|=\|E_{g^*}\|$，即$\overline{g}$是$f$在$G$中的最佳逼近.

定理3.6 设 i）G是$C(X)$的有限维子空间；ii）f_k，$f\in\mathbf{F}$，$k=1,2,\cdots$，且f_k以联合收敛到f，即

$$\left\|\int_Y|f_k(x,y)-f(x,y)|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\|\to0$$

iii）$\overline{g_k}$是f_k在G中的最佳逼近元. 则$\{\overline{g_k}\}$存在在X上一致收敛的子序列，且此收敛于列的极限函数是f在G中的最佳逼近元.

证明 首先由条件ii）知，必存在$M>0$，便对任意k有$\left\|\left(\int_Y|f_k(x,y)|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right\|\leqslant M$.现

在我们证明 $\{g_k\}$ 有界．设 g^* 是 f 在 G 中的最佳逼近元，由于

$$\|\overline{g_k}\| \leqslant \|(\int_Y |f_k(x,y)-\overline{g}_k(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}\| + \|(\int_Y |f_k(x,y)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}\|$$
$$\leqslant \|(\int_Y |f_k(x,y)-g^*(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}\| + M$$
$$\leqslant \|g^*\| + 2M < \infty$$

即 $\{\overline{g_k}\}$ 有界，又 G 是有限维子空间，故 $\{\overline{g_k}\}$ 存在在 X 上一致收敛的子列，设其极限函数为 $\overline{g}$．下面我们证明 $\overline{g}$ 是 f 在 G 中的最佳逼近元，即

$$\|E_{\overline{g}}\| = \|E_{g^*}\|.$$

显然 $\|E_{g^*}\| \leqslant \|E_{\overline{g}}\|$．此外

$$\|E_{g^*}\| = \|(\int_Y |f(x,y)-g^*(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}\|$$
$$\geqslant \|(\int_Y |f_k(x,g)-g^*(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}\| - \|(\int_Y |f_k(x,y)-f(x,y)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}\|$$
$$\geqslant \|(\int_Y |f_k(x,y)-\overline{g}_k(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}\| - \|(\int_Y |f_k(x,y)-f(x,y)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}\| \tag{3.3}$$

由于对任意 $x \in X$，

$$|(\int_Y |f_k(x,y)-\overline{g}_k(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} - (\int_Y |f(x,y)-\overline{g}(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}|$$
$$\leqslant |\int_Y |f_k(x,y)-f(x,y)+\overline{g}_k(x)-\overline{g}(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}|$$
$$\leqslant (\int_Y |f_k(x,y)-f(x,y)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} + |\overline{g}_k(x)-\overline{g}(x)| \tag{3.4}$$

由假设（此时，不失一般性，设 $\{\overline{g}_k\}$ 在 X 上一致收敛到 $\overline{g}$），(3.4) 右边，当 $k\to\infty$ 时，趋于0. 0. 故在 (3.3) 中令 $k\to\infty$ 即得

$$\|E_{g^*}\| \geqslant \|E_{\overline{g}}\|$$

故 $\|E_{\overline{g}}\| = \|E_{g^*}\|$．即 $\overline{g}$ 是 f 在 G 中的最佳逼近元．

参 考 文 献

[1] W. H. Ling, Proc. Amer. Math. Soc 48(1975), 185—188.

[2] Y. G. Shi, J. A. T 32(1981), 305—315.

[3] 史应光，计算数学，1(1983)，60—65.

[4] 李冲，数学杂志 3(1985)，231—240.

[5] 夏道行等编，实变函数与泛函分析(上)．人民教育出版社(1978)．

[6] E. W. Cheney，逼近论导引，上海科技出版社，1981.

[7] G. G. Lorentz，函数逼近论，上海科技出版社，1981.

[8] C. B. Dunham, J. A. T. 37(1983), 5—11.

The Best Simultaneous Approxlmation

Li Jiangbo

(Zhejiang, Lishui Teachers' College)

Abstract

In this paper, we study the problem of simultaneous approximation to bivariate function by one variate function, i.e., minimizing the expression

$$\max_{x\in X}\left(\int_Y |f(x,y)-g(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \quad (p\geqslant 1)$$

over G, G is an noempty subset in $C(X)$.

We obtain the characterization theorems, the uniqueness theorems, the strong uniqueness theorems and de la Vallée Poussin theorems. We also establish the first algorithm of Remes type and two limit theorems.

(from 422)

Theorem 2 in [2] as a corollary:

Corollary A finite field has no proper pseudo ideals.

Thus we almost fail to characterise a division ring by pseudo ideals instead of ideals.

The author would like to thank Prof. Guo Zhurui for his encouragement!

References

[1] M. K. Sen, Nanta Math., 4: 2 (1976), 158—160.

[2] Wang Xuekuan, J. Math. Research Expos., 8: 2 (1988), 184—186.