第10卷 第3期
1990年8月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.10 No.3
Aag. 1990

单连通区域上解析函数的插值问题*

文 鸣

（同济大学应用数学系，上海）

摘要 本文利用单位圆盘上Hardy空间插值问题的已知结论，用较初等的方法，对边界至少含有两个不同点的任意单连通区域，给出插值问题有解的充分必要条件．

1．引言及主要结果

关于单位圆盘 $D=\{|w|<1\}$（或者上半平面）上的Hardy空间的插值问题已得到彻底解决(见［1］，［4］，［5］)．近年来，仅仅只把单位圆盘的结果推广到了一些特殊的区域（例如带形域，方形域等），而对一般区域上的插值问题，却没有相关的结论．本文利用单位圆盘上Hardy空间插值问题的已知结论，用较初等的方法，对边界至少含有两个不同点的任意单连通区域，给出插值问题有解的充分必要条件．

记Ω是复平面$\mathbf{C}$上的单连通区域，其边界$\partial\Omega$至少含有两个不同的点．设$0<p\leqq\infty$．Ω内的解析函数 $f(z)\in E^p(\Omega)$是指：如果存在可求长的Jordan 曲线列$c_1,c_2,\cdots$趋于$\partial\Omega$(即任给Ω的紧子集K，则从某下标N_K后，K含于c_n所围的区域中)，使得

$$\sup_n\int_{c_n}|f(z)|^p|dz|\leqq M<\infty. \tag{1.1}$$

显然 $E^p(D)=H^p(D)$．(见［1］，Chap.10)．

用Φ表示Ω到D的所有黎曼映射φ的集．对$\varphi\in\Phi$，$z\in\Omega$，令$\psi=\varphi^{-1}$，$w=\varphi(z)$，那么

$$a_z=|\psi'(w)|(1-|w|^2)=|\psi'(\varphi(z))|(1-|\varphi(z)|^2) \tag{1.2}$$

关于φ是不变的．即如果$\varphi_1\in\Phi$，记$\psi_1=\varphi_1^{-1}$，则

$$|\psi_1'(\varphi_1(z))|(1-|\varphi_1(z)|^2)=|\psi'(\varphi(z))|(1-|\varphi(z)|^2). \tag{1.3}$$

事实上，如果f是D内的解析函数，τ是Mobius变换，则有

$$|f'(w)|(1-|w|^2)=|(f\circ\tau^{-1})(\zeta)|(1-|\zeta|^2), \tag{1.4}$$

其中$\zeta=\tau(w)$(见［2］，p.3)．令$\sigma^{-1}=\varphi\circ\varphi_1$，那么$\sigma$是Mobius变换，且

$$\psi_1=\psi\circ\sigma^{-1}\quad,\quad \varphi=\sigma^{-1}\circ\varphi_1. \tag{1.5}$$

再令 $w=\varphi_1(z)$，则由(1.4)，(1.5)，有

$$|\psi_1'(\varphi_1(z))|(1-|\varphi_1(z)|^2)=|\psi_1'(w)|(1-|w|^2)=|(\psi\circ\sigma^{-1})'(w)|(1-|w|^2)$$
$$|\psi'(\sigma^{-1}\circ\varphi_1(z))|(1-|\sigma^{-1}\circ\varphi_1(z)|^2)=|\psi'(\varphi(z))|(1-|\varphi(z)|^2),$$

此即(1.3)．

* 1988年10月18日收到．上海市青年自然科学基金资助项目．

对每个 $z\in\Omega$，唯一地存在 $\varphi_z\in\Phi$，使得

$$\varphi_z(z)=0,\ \varphi_z'(z)>0.$$

对 $z,\zeta\in\Omega$，令 $\rho(z,\zeta)=|\varphi_z(\zeta)|$，那么 ρ 是对称的，即 $\rho(z,\zeta)=\rho(\zeta,z)$。事实上，如果 $\sigma=\varphi_z\circ\varphi_\zeta^{-1}$，那么 σ 是Mobius变换，因此

$$\rho(\zeta,z)=|\varphi_\zeta(z)|=\left|\frac{\sigma(\varphi_\zeta(z))-\sigma(0)}{1-\sigma(\varphi_\zeta(z))\overline{\sigma(0)}}\right|$$

$$=\left|\frac{\varphi_z\circ\varphi_\zeta^{-1}\circ\varphi_\zeta(z)-\varphi_z\circ\varphi_\zeta^{-1}(0)}{1-\varphi_z\circ\varphi_\zeta^{-1}\circ\varphi_\zeta(z)\cdot\overline{\varphi_z\circ\varphi_\zeta^{-1}(0)}}\right|=|\varphi_z(\zeta)|=\rho(z,\zeta). \quad (1.6)$$

由[2](p.5)可知 ρ 还定义了 Ω 上的伪双曲距离.

定义 Ω 中的点到 $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ 称为一致分离的，如果存在 $\delta>0$，使得

$$\inf_k\prod_{\substack{j=1\\ z_j\neq z_k}}^{\infty}\rho(z_j,z_k)\geqq\delta. \quad (1.7)$$

此时记 $\{z_j\}\in US$.

分别以 s_k，p_k 记 z_k 在 $\{z_j\}_{j=1}^{k}$，$\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ 中出现的次数. 令 $a_j=a_{z_j}$，考虑 $E^p(\Omega)$ 到数列空间的线性算子 T_p，其定义如下：

$$(T_pf)_j=a_j^{s_j-1+\frac{1}{p}}f^{(s_j-1)}(z_j),\quad j=1,2,\cdots.$$

我们的主要定理叙述如下：

定理 设 $\sup\limits_k p_k<\infty$，$0<p\leqq\infty$. 则 $T_p(E^p(\Omega))=l^p$ 的充分必要条件是 $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}\in US$.

2. 定理的证明

引理 设 $\psi(w)$ 是 D 上单叶解析函数，$0<\delta\leqq\frac{1}{2}$. 只要 $|w-w_0|=\delta(1-|w_0|)$，则有

$$\frac{3}{4}\leqq\left|\frac{\psi'(w_0)}{[\psi(w)-\psi(w_0)]/(w-w_0)}\right|\leqq\frac{5}{4}. \quad (2.1)$$

证明 令 $h(u)=\psi(w_0+2\delta(1-|w_0|)u)$，$H(u)=(h(u)-h(0))/h'(0)$. 那么 $H(u)$ 是 D 上单叶解析函数，且 $H(0)=0$，$H'(0)=1$. 因此，由[3](定理1.6)，有

$$\frac{|u|}{(1+|u|^2)}\leqq|H(u)|\leqq\frac{|u|}{(1-|u|^2)} \quad (2.2)$$

令 $w=w_0+2\delta(1-|w_0|)u$. 则当 $|w-w_0|=\delta(1-|w_0|)$ 时，$|u|=\frac{1}{2}$. 所以由(2.2)得

$$\frac{2}{5}\leqq|1+(u)|\leqslant\frac{2}{3}.$$

从而

$$\frac{2}{5}\leqq\left|\frac{\psi(w)-\psi(w_0)}{2\delta(1-|w_0|)\psi'(w_0)}\right|=\left|\frac{\psi(w)-\psi(w_0)}{2(w-w_0)\psi'(w_0)}\right|\leqq\frac{2}{3}$$

此即(2.1). ■

定理必要性的证明 取定 $\varphi\in\Phi$，令 $w_j=\varphi(z_j)$，因为 $\sigma_k=\varphi_{z_k}\circ\varphi^{-1}$ 是Mobius变换，所以

$$\prod_{\substack{j=1\\ w_j\neq w_k}}^{\infty}\left|\frac{w_j-w_k}{1-w_j\overline{w_k}}\right|=\prod_{\substack{j=1\\ z_j\neq z_k}}^{\infty}\left|\frac{\varphi(z_j)-\varphi(z_k)}{1-\varphi(z_j)\overline{\varphi(z_k)}}\right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \prod_{\substack{j=1 \\ z_j \neq z_k}} \left| \frac{\sigma_k^{-1} \circ \varphi_{z_k}(z_j) - \sigma_k^{-1} \circ \varphi_{z_k}(z_k)}{1 - \sigma_k^{-1} \circ \varphi_{z_k}(z_j) \cdot \overline{\sigma_k^{-1} \circ \varphi_{z_k}(z_k)}} \right| \\
&= \prod_{\substack{j=1 \\ z_j \neq z_k}}^{\infty} \left| \frac{\sigma_k^{-1} \circ \varphi_{z_k}(z_j) - \sigma_k^{-1}(0)}{1 - \sigma_k^{-1} \circ \varphi_{z_k}(z_j) \overline{\sigma_k^{-1}(0)}} \right| \\
&= \prod_{\substack{j=1 \\ z_j \neq z_k}}^{\infty} |\varphi_{z_k}(z_j)| = \prod_{\substack{j=1 \\ z_j \neq z_k}}^{\infty} \rho(z_k, z_j). \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

令 $Rf(w) = f(\psi(w))\psi'(w)^{\frac{1}{p}}$，则 $f(z) \in E^p(\Omega)$ 的充分必要条件是 $Rf \in H^p(D)$．见[1]（定理10.1的推论）．

令$N = \{j, s_j = 1\} = \{n_j\}_{j=1}^{\infty}$．考虑 $H^p(D)$ 到数列空间的线性算子T_{1p}如下：

$$(T_{1p}g)_j = g(w_{n_j})(1 - |w_{n_j}|^2)^{\frac{1}{p}},$$

注意到

$$
\begin{aligned}
f(z_j)a_j^{\frac{1}{p}} &= f(\psi(w_j))|\psi'(w_j)|^{\frac{1}{p}}(1 - |w_j|^2)^{\frac{1}{p}} \\
&= f(\psi(w_j))\psi'(w_j)^{\frac{1}{p}}(1 - |w_j|^2)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|\psi'(w_j)|}{\psi'(w_j)}\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

故由 $T_p(E^p(\Omega)) = l^p$可知 $T_{1p}(H^p(D)) = l^p$．由[1]（定理p.1）得

$$\inf_k \prod_{j \neq k} \left| \frac{w_{n_j} - \overline{w}_{n_k}}{1 - w_{n_j}\overline{\overline{w}}_{n_k}} \right| \geqq \delta > 0.$$

由于 $\sup_k p_k < \infty$，故由(2.3)可知上式等价于$\{z_j\} \in US$.

定理充分性的证明　我们用归纳法来证明．设$\{z_j\} \in US$，那么当 $p_k = 1$，$k = 1, 2, \cdots$时，由(2.3)，(2.4)及[1]的定理9.1，定理10.1立即可得$T_p(E^p(\Omega)) = l^p$．现假设当 $\sup_k p_k = n$时，有 $T_p(E^p(\Omega)) = l^p$．下面证明这个等式当 $\sup_k p_k = n+1$时也成立．

我们先证明 $T_p(E^p(\Omega)) \subset l^p$．设 $f(z) \in E^p(\Omega)$，那么$Rf(w) \in H^p(D)$．对$z_0 \in \Omega$，令 $w_0 = \varphi(z_0)$．设B_0是圆周$|w - w_0| = \delta(1 - |w_0|)$，$\delta$适当小，$\tau_0$是$B_0$在$\psi = \varphi^{-1}$下的象，由Cauchy公式，有

$$
\begin{aligned}
f^{(m)}(z_0) &= \frac{m!}{2\pi i}\int_{\tau_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}}\,dz = \frac{m}{2\pi i}\int_{B_0} \frac{f(\psi(w))\psi'(w)}{(\psi(w) - \psi(w_0))^{m+1}}\,dw \\
&= \frac{m!}{2\pi i\psi'(z_0)^{m+\frac{1}{p}}}\int_{B_0} \frac{f(\psi(w))\psi'(w)^{\frac{1}{p}}}{(w - w_0)^{m+1}} F(w, w_0)\,dw,
\end{aligned}
$$

其中

$$F(w, w_0) = \frac{\psi'(w)^{1-\frac{1}{p}}\psi'(w_0)^{m+\frac{1}{p}}}{\left(\frac{\psi(w) - \psi(w_0)}{w - w_0}\right)^{m+1}}$$

由引理，$F(w, w_0)$在$|w - w_0| = \delta(1 - |w_0|)$时是有上下界的，因此

$$|f^{(m)}(z_0)\psi'(z_0)^{m+\frac{1}{p}}| \leqq \frac{C\max_{w \in B_0}|Rf(w)|}{\delta^m(1 - |w_0|)^m}$$

其中C是与f，w_0无关的常数，从而

$$|f^{(m)}(z_0)a_{z_0}^{m+\frac{1}{p}}|\leqq C(1-|w_0|^2)^{\frac{1}{p}}\max_{w\in B_0}|Rf(w)|,$$

记 $B_j=\{w;|w-w_j|=\delta(1-|w_j|)\}$，那么

$$\sum_j|f^{(s_j-1)}(z_j)a_j^{s_j-1+\frac{1}{p}}|^p$$

$$\leqq C\sum_{j=1}^{\infty}(1-|w_j|^2)\max_{w\in B_j}|Rf(w)|\leqq C\|Rf\|_{H^p(D)},\tag{2.5}$$

其中最后一个不等式见[4]．这就证明了$T_p(E^p(\Omega))\subset l^p$.

现证$l^p\subset T_p(E^p(\Omega))$．设$\{b_j\}_{j=1}^{\infty}\in l^p$，令

$$b'_j=\begin{cases}b_j, & s_j\leqq n\\ 0, & s_j=n+1,\end{cases}$$

显然$\{b'_j\}\in l^p$，由归纳假设，存在$f_1(z)\in E^p(\Omega)$，使得

$$f_1^{(s_j-1)}(z_j)a_j^{s_j-1+\frac{1}{p}}=b_j,\quad j=1,2,\cdots,\ s_j\leqq n.$$

由(2.5)，有

$$\sum_{\substack{j\\ s_j=n+1}}|f_1^{(n)}(z_j)a_j^{n+\frac{1}{p}}|^p\leqq C\|f_1\|_{E^p(\Omega)}^p,\tag{2.6}$$

令

$$b''_j=\begin{cases}\left[\dfrac{|\varphi'(z_j)|}{\varphi'(z_j)}\right]^{n+\frac{1}{p}}(b_j-f_1^{(n)}(z_j)a_j^{n+\frac{1}{p}}), & s_j=n+1,\\ 0 & \text{其它},\end{cases}$$

那么$\{b''_j\}\in l^p$．因此存在$g_2\in H^p(D)$，使得

$$g_2^{(s_j-1)}(w_j)(1-|w_j|^2)^{(s_j-1)+\frac{1}{p}}=b''_j,\quad j=1,2,\cdots.\tag{2.7}$$

(见[5])．令 $f_2(z)=g_2(\varphi(z))\varphi'(z)^{\frac{1}{p}}$，$f(z)=f_1(z)+f_2(z)$，那么由$f_2\in E^p(\Omega)$可知$f\in E^p(\Omega)$.

当$s_j=n+1$时，有

$$f^{(n)}(z_j)a_j^{n+\frac{1}{p}}=f_1^{(n)}(z_j)a_j^{n+\frac{1}{p}}+f_2^{(n)}(z_j)a_j^{n+\frac{1}{p}}$$

$$=f_1^{(n)}(z_j)a_j^{n+\frac{1}{p}}+g_2^{(n)}(\varphi(z_j))\varphi'(z_j)^{n+\frac{1}{p}}a_j^{n+\frac{1}{p}}+F_n(z_j)a_j^{n+\frac{1}{p}},$$

其中

$$F_n(z)=(g_2(\varphi(z))\varphi'(z)^{\frac{1}{p}})^{(n)}-g_2^{(n)}(\varphi(z)\varphi'(z))^{n+\frac{1}{p}}=\sum_{k=0}^{n-1}g_2^{(k)}(\varphi(z))a_k(z),$$

其中$a_k(z)$是与$\varphi(z)$有关的函数．由(2.7)，$g_2^{(k)}(z_j)=0$，$k\leqq n-1$.因此$F_n(z_j)=0$，故

$$f^{(n)}(z_j)a_j^{n+\frac{1}{p}}=f_1^{(n)}(z_j)a_j^{n+\frac{1}{p}}+b''_j\cdot\left[\frac{\varphi'(z_j)}{|\varphi'(z_j)|}\right]^{n+\frac{1}{p}}=b_j,\quad s_j=n+1.$$

同理，当$s_j\leqq n$时

$$f^{(s_j-1)}(z_j)a_j^{s_j-1+\frac{1}{p}}=f_1^{(s_j-1)}(z_j)a_j^{s_j-1+\frac{1}{p}}=b_j\ .$$

从而$T_pf=\{b_j\}$. 这就证明了当$\sup_k p_k=n+1$时，$T_p(E^p(\Omega))=l^p$，定理证完.

最后，作者对导师沈燮昌教授的热情指导表示衷心的感谢！

参考文献

[1] P. L. Duren, Theory of H^p spaces, Academic Press, Inc., New York (1970).

[2] J.B. Garnett, Bounded analysis functions, Academic Press, Inc., Now York (1981).

[3] C. Pommerenke, Univalent Functions, Vandenhoeck and Ruprecht in Göttingen (1975).

[4] H. S. Shapiro and A. L. Shields, Amer. Jour. of Math., 83 (1961), 513—532.

[5] M. M. Джрбашян, Цзв, AH, CCCP, сер, матем., 42; 6 (1978), 1322—1384.

[6] K. Г. Казаран, B. M. Март роаян, Мзв. AH. CCCP, сер. матем., XX: 3 (1985), 205—236.

[7] C. E. Вукушиин, Мзв, AH, CCCP. сер. матем, XVIII: 4 (1983), 283—290.

The interpolation by analytic functions in simply connected region

Wen Ming

Abstract

In this paper, some results of interpolation by analytic functions in disk or half plane have been expanded to simply connected region by means of Möbius transformations.