第10卷 第4期
1990年11月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.10 No.4
Nov., 1990

具有超解析Cauchy核的奇异积分方程*

戴道清　　林伟

（中山大学数学系，广州）

超解析函数是平面$2(r+1)$个未知函数的一阶椭圆型方程组的解，这类椭圆型方程组的特征值为$\pm i$，并且可以写为实数形式：

$$\begin{aligned}&u_{0,x}-v_{0,y}=0,\\&u_{0,y}+v_{0,x}=0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots,\\&u_{k,x}-v_{k,y}+au_{k-1,x_x}+bu_{k-1,y}=0,\\&u_{k,y}+v_{k,x}+au_{k-1,x}+bv_{k-1,y}=0,\ k=1,2,\cdots,r.\end{aligned}\tag{1}$$

在Douglis[3]引入的由幂零元e($e^{r+1}=0$)和纯虚数i生成的超复代数$\mathscr{A}_r$的记号下，可把方程组（1）写为如下形式：

$$DW=(\frac{\partial}{\partial\bar{z}}+q(z)\frac{\partial}{\partial z})W,\tag{2}$$

其中$q(z)=\sum\limits_{k=1}^{r}q_k(z)e^k$，$W(z)=\sum\limits_{k=0}^{r}W_k(z)e^k$，$W_k=u_k+iv_k$，系数$q_k$依赖于(1)中的系数$a$和$b$.

若函数$q_k(k=1,2,\cdots,r)$ Hölder连续，则方程(2)存在形如$t(z)=z+\sum\limits_{k=1}^{r}t_k(z)e^k=z+T(z)$的生成解，它满足方程$Dt=0$，并且函数$T$是全平面上一次连续可微的有界函数.我们称形如$\phi(z)=\sum\limits_{k=0}^{r}\phi_k(z)e^k$的函数为超复函数，这里$\phi_k$是定义在平面某区域上的复值函数.如果超复函数$\phi$在开区域$\Omega$上一次连续可微，且满足方程$D\phi=0$，则称$\phi$为超解析函数.本文中将采用文献[2]中的术语和记号.本文研究形如

$$(\boldsymbol{K}\varphi)(\tau)=a(\tau)\varphi(\tau)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{k(\zeta,\tau)\varphi(\zeta)}{t(\zeta)-t(\tau)}\mathrm{d}t(\zeta)=f(\tau),\quad \tau\in L,\tag{3}$$

的奇异积分方程，其中函数a, k为超复函数，即$a(\tau)=\sum\limits_{k=0}^{r}a_k(\tau)e^k$，$k(\zeta,\tau)=\sum\limits_{k=0}^{r}\kappa_k(\zeta,\tau)e^k$，我们假定它们是Hölder连续的，记为$\in C^{0,\alpha}(0<\alpha<1)$．我们假定区域$\Omega^+$是由复平面上一组$C^{1,\alpha}$类互不相交的封闭曲线所围成，在这些曲线中有一条将其余的包含在其内部，这组曲线

* 1987年12月9日收到．国家自然科学基金和中山大学高等学术研究中心资助项目．

簇之并我们记作L，而记$\Omega^-=C\setminus(\Omega^+\cup L)$，并且假定$\Omega^+$是有界区域.

Ⅰ　方程(3)的特征方程为

$$(\boldsymbol{K}^0\varphi)(\tau)=a(\tau)\varphi(\tau)+\frac{b(\tau)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{t(\zeta)-t(\tau)}\mathrm{d}t(\zeta)=f(\tau),\quad \tau\in L, \tag{4}$$

它的相联方程为

$$(\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi)(\tau)=a(\tau)\psi(\tau)-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{b\,b(\zeta)\psi(\zeta)}{t(\zeta)-t(\tau)}\mathrm{d}t(\zeta)=g(\tau),\ \tau\in L, \tag{5}$$

这里我们假定函数a,b,f,g都是定义在L上的超复函数且$\in C^{0,\alpha}(L)$.

设方程(4)是正则型的，即$a_0^2(\tau)-b^2(\tau)\neq0$，$\tau\in L$，这里$a_0$、$b_0$分别是$a,b$的复数部分.定义方程(4)的指数为

$$\kappa=\frac{1}{2\pi i}\int_L\mathrm{d}\log\frac{a_0-b_0}{a_0+b_0}.$$

设方程(4)有解$\varphi\in C^{0,\alpha}(L)$.引进分区超解析函数

$$\phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\zeta)}{t(\zeta)-t(z)}\mathrm{d}t(\zeta),\quad z\bar{\in}L,$$

可以证明求解(4)等价于求解

$$\phi_+(\tau)=G(\tau)\phi_-(\tau)+\frac{f(\tau)}{a(\tau)+b(\tau)},\quad \tau\in L,$$

$$\phi_-(\infty)=0,$$

其中$G(\tau)=\dfrac{a(\tau)-b(\tau)}{a(\tau)+b(\tau)}$，它的复数部分为$\dfrac{a_0-b_0}{a_0+b_0}$.

设$G(\tau)=X_+(\tau)t^\kappa(\tau)X_{0-}(\tau)$，$\tau\in L$，是$G$的典则分解[2]，即$X(z)$在$\Omega^+$内超解析且可逆，$X_0(z)$在$\Omega^-$内超解析且在$\Omega^-\cup\{\infty\}$上可逆.则当$\kappa\geqslant0$时有

$$\varphi(\tau)=(\boldsymbol{K}^*f)(\tau)+b^*(\tau)Z(\tau)Q_{\kappa-1}(\tau), \tag{6}$$

其中$a^*(\tau)=\dfrac{a(\tau)}{a^2(\tau)-b^2(\tau)}$，$b^*(\tau)=\dfrac{b(\tau)}{a^2(\tau)-b^2(\tau)}$，$Z(\tau)=[a(\tau)+b(\tau)]X_+(\tau)=[a(\tau)-b(\tau)]t^{-\kappa}(\tau)X_{0-}^{-1}(\tau)$，而$(\boldsymbol{K}^*f)(\tau)=a^*(\tau)f(\tau)-b^*(\tau)Z(\tau)\displaystyle\int_L\frac{f(\zeta)\mathrm{d}t(\zeta)}{Z(\zeta)[t(\zeta)-t(\tau)]}$，$Q_{\kappa-1}$是任意的关于$t(z)$的次数不超过$\kappa-1$的多项式($Q_{-1}\equiv0$).

而当$\kappa<0$时，当且仅当条件

$$\int_L\frac{t^k(\zeta)f(\zeta)\mathrm{d}t(\zeta)}{Z(\zeta)}=0,\quad k=0,1,\cdots,-\kappa-1, \tag{7}$$

满足时方程(4)可解.

对于齐次方程$\boldsymbol{K}^0\varphi=0$，当$\kappa>0$时显然有$\kappa$个线性无关解.

$$t^k(\tau)b^*(\tau)Z(\tau),\quad k=0,1,\cdots,\kappa-1, \tag{8}$$

而当$\kappa<0$时，它只有零解.

定理1　齐次方程$\boldsymbol{K}^0\varphi=0$，当$\kappa>0$时有$\kappa$个线性无关解(8)，当$\kappa<0$时只有零解；非齐次方程$\boldsymbol{K}^0\varphi=f$，当$\kappa\geqslant0$时有一般解(6)，当$\kappa<0$时，当且仅当$f$满足$-\kappa$个可解条件

（7）时才可解．这时它的唯一解可由（6）中取$Q_{\kappa-1}\equiv 0$而得到．

类似地可以求解相联方程（5）．

定理2（Noether定理）

i）　$K^0\varphi=0$ 与 $K^{0\prime}\psi=0$ 的线性无关解的个数有限；

ii）　设 $K^0\varphi=0$ 与 $K^{0\prime}\psi=0$ 的解的个数分别为 l 与 l'，则 $l-l'=\kappa$，其中 κ 为 K^0 的指数．

iii）　$K^0\varphi=f$ 可解的充要条件是$\int_L\psi(\zeta)f(\zeta)\mathrm{d}t(\zeta)=0$，其中 $\{\psi_k\}$ 是方程 $K^{0\prime}\psi=0$ 的完全解组．

Ⅱ 一般正则型奇异积分方程的Noether定理

对于一般形式的奇异积分方程

$$(K\varphi)(\tau)=a(\tau)\varphi(\tau)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\kappa(\zeta,\tau)\varphi(\zeta)}{t(\zeta)-t(\tau)}\mathrm{d}t(\zeta)=f(\tau),\ \tau\in L, \tag{9}$$

以及与它相联的方程

$$(K'\psi)(\tau)=a(\tau)\psi(\tau)-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\kappa(\tau,\zeta)\psi(\zeta)}{t(\zeta)-t(\tau)}\mathrm{d}t(\zeta)=g(\tau),\quad \tau\in L, \tag{10}$$

我们可以利用正则化方法将它们化为等价的Fredholm方程．为此，我们需要一些引理．

引理3　设$f\in C^{0,\alpha}(L\times L)$为超复值函数．则

$$\int_L\mathrm{d}t(\zeta)\int_L\frac{f(\zeta,\tau)}{t(\tau)-t(\zeta)}\mathrm{d}t(\tau)=\int_L\mathrm{d}t(\tau)\int_L\frac{f(\zeta,\tau)\mathrm{d}t(\zeta)}{t(\tau)-t(\zeta)}$$

引理4　设 $f\in C^{0,\alpha}(L\times L)$ 为超复值函数，则

$$\int_L\frac{\mathrm{d}t(\zeta)}{t(\zeta)-t(\zeta_0)}\int_L\frac{f(\zeta,\tau)\mathrm{d}t(\tau)}{t(\tau)-t(\zeta)}$$

$$=-\pi^2f(\zeta_0,\zeta_0)+\int_L\mathrm{d}t(\tau)\int_L\frac{f(\zeta,\tau)\mathrm{d}t(\zeta)}{[t(\zeta)-t(\zeta_0)][t(\tau)-t(\zeta)]},\quad \zeta_0\in L.$$

定理5　奇异积分方程

$$K\varphi=f,$$

一定等价于某一个 Fredholm 方程．

定理6（Noether定理）设方程 $K\varphi=f$ 是正则型的，即 $a_0^2-b_0^2\neq 0$．则

i）　$K\varphi=0$ 的线性无关解的个数有限，

ii）　方程 $K\varphi=f$ 可解的充要条件是

$$\int_L\psi_k(\zeta)f(\zeta)\mathrm{d}t(\zeta)=0,\ k=1,2,\cdots,l',$$

其中 $\{\psi_k\}$ 是方程 $K'\psi=0$ 的完全解组，

iii）　设 $K\varphi=0$ 与 $K'\psi=0$ 的解的个数分别为 l 与 l'，则 $l-l'=k$，这里 κ 是算子 K 的指数，而 K' 是 K 的相联算子．

Ⅲ 一种直接算法

本段中假设 L 是一条 $C^{1,\alpha}$ 类闭曲线．超复函数 $a(\tau)$ 是在 Ω^+ 内超解析，在 Ω^+ 上 $\in C^{0,\alpha}$ 的函数 $a(z)$ 的边值，而超复函数 $\kappa(\zeta,\tau)$ 是超复函数 $\kappa(z_1,z)$ 在 $L\times L$ 上的边值，$\kappa(z_1,z)$ 当 z_1

$\in\overline{\Omega}^+$时对z在Ω^+内超解析，当$z\in\overline{\Omega}^-$时对z_1在Ω^-内超解析，且在$\overline{\Omega}$上对z_1，$z\in C^{0,\alpha}$，$f\in C^{0,\alpha}(L)$为超复函数．记$b(z)=\kappa(z,z)$，并且假定超复函数$a(z)\pm b(z)$在L上非退化，即其复数部分$a_0(\tau)\pm b_0(\tau)\neq 0$，$\tau\in L$；函数$a(z)+b(z)$在$\Omega^+$内有重数为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$的零点$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，即$a(z)+b(z)=\prod_{j=1}^{m}[t(z)-t(\alpha_j)]^{\lambda_j}A(z)$，$\det A\neq 0$，函数$a(z)-b(z)$在$\Omega^+$内有重数为$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$的零点$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，即$a(z)-b(z)=\prod_{j=1}^{n}[t(z)-t(\beta_j)]^{\mu_j}B(z)$，$\det B\neq 0$，而且假设$\alpha_l\neq\beta_j$，$l=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$．

首先我们给出几个引理：

引理 7 设超复函数$f\in C^{0,\alpha}(L)$．则$f(\zeta)$是在Ω^+内超解析函数$\phi(z)$的边值的充要条件是

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(\zeta)}{t(\zeta)-t(z)}\,\mathrm{d}t(\zeta)=0,\quad z\in\Omega^-,$$

或等价地

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}t(\zeta)}{t(\zeta)-t(\tau)}=\frac{1}{2}f(\tau),\quad \tau\in L_0.$$

引理 8 设超解析函数$\phi(z)$在Ω^+内以$z=z_0$为孤立奇点，则由Laurant展开式[3]，有

$$\phi(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}A_n[t(z)-t(z_0)]^n,$$

其中$A_n=\frac{1}{n!}\dot{D}^n\phi(z_0)$．且

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\varphi(z)\,\mathrm{d}t(z)=A_{-1}$$

引理 9 设ψ在Ω^+内超解析，且在$\overline{\Omega}^+$上连续．则当$n\geqslant 1$时，有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\psi(z)\,\mathrm{d}t(z)}{[t(z)-t(z_0)]^n}=\frac{1}{(n-1)!}\dot{D}^{n-1}\psi(z_0),\quad z_0\in\Omega^+.$$

引理10 设

$$\phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\kappa(\zeta,z)\,\mathrm{d}t(\zeta)}{t(\zeta)-t(z)},\qquad z\in\Omega^+,$$

其中$\kappa(\zeta,z)$当$\zeta\in L$时对$z\in\Omega^+$超解析，对$z\in\overline{\Omega}^+$连续，且当$\zeta,\tau\in L$时$\in C^{0,\alpha}$．则$\phi(z)$在Ω^+内超解析，在$\overline{\Omega}^+$上$\in C^{0,\alpha}$，且

$$\phi_+(\tau)=\frac{1}{2}\kappa(\tau,\tau)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\kappa(\zeta,\tau)\,\mathrm{d}t(\zeta)}{t(\zeta)-t(\tau)},\quad \tau\in L.$$

现求解方程（9）．设方程（9）有解φ，它必$\in C^{0,\alpha}$，由此定义

$$\phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\kappa(\zeta,z)\varphi(\zeta)\,\mathrm{d}t(\zeta)}{t(\zeta)-t(z)},\quad z\in\Omega^+,$$

则有

$$\phi(z)=\frac{a(z)-b(z)}{a(z)+b(z)}\Big[F(z)-2\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=0}^{\mu_j-1}B_{jp}(z)\dot{D}^p\phi(\beta_j)\Big],\tag{11}$$

其中

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\kappa(\zeta,z)f(\zeta)\mathrm{d}t(\zeta)}{[a(\zeta)-b(\zeta)][t(\zeta)-t(z)]},$$

$$B_{jp}(z)=\frac{1}{p!(\mu_j-p-1)!}\dot{D}^{\mu_j-p-1}\left\{\frac{\kappa(\beta_j,z)}{[t(\beta_j)-t(z)]E_j(\beta_j)}\right\},$$

$$a(\zeta)-b(\zeta)=[t(\zeta)-t(\beta_j)]^{\mu_j}E_j(\zeta),\quad j=1,2,\cdots,n,\ p=0,1,\cdots,\mu_j-1.$$

若方程（9）可解，显然以下两点必须满足：

1° 当把 $z=\beta_j(j=1,2,\cdots,n)$ 代入（11）及其直到 μ_j-1 阶导数时，两边不能出现矛盾；

2° （11）的右边确实是 Ω^+ 内的超解析函数.

条件 1° 在我们的假设下能够自动满足. 令 $C_{jp}=\dot{D}^p\phi(\beta_j)$ 为待定常数. 则由条件 2°，我们要求线性代数方程组

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=0}^{\mu_j-1}\dot{D}^sB_{jp}(a_k)C_{jp}=\frac{1}{4\pi i}\int_L\frac{f(\zeta)}{a(\zeta)-b(\zeta)}\dot{D}^s\frac{\kappa(\zeta,a_k)}{tt(\zeta)-t(a_k)}\mathrm{d}t(\zeta),\tag{12}$$

$$(s=0,1,\cdots,\lambda_{k-1},\quad k=1,2,\cdots,m.)$$

相容.

这样，我们有定理

定理11 在本节开始的假定下，方程（9）可解的充分必要条件是线性代数方程组（12）相容. 且这时解 φ 由

$$\varphi(\tau)=\frac{a(\tau)f(\tau)}{a^2(\tau)-b^2(\tau)}-\frac{1}{a(\tau)+b(\tau)}\cdot\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\kappa(\zeta,\tau)f(\zeta)\mathrm{d}t(\zeta)}{[a(\zeta)-b(\zeta)][t(\zeta)-t(\tau)]}$$

$$+\frac{4}{a(\tau)+b(\tau)}\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=0}^{\mu_j-1}C_{jp}B_{jp}(\tau),$$

给出.

参 考 文 献

[1] 路见可，解析函数边值问题，上海科学技术出版社，1987.

[2] R. P. Gilbert and J. Buchanan, First Order Elliptic Systems, Academic Press, New York, London, 1983.

[3] A. Douglis, Comm. Pure Appl. Math. 6 (1953), 259—289.

On Singular Integral Equation with Hyperanalytic Cauchy Kernel

Dai Daoqing *Lin Wei*

(Dept. Math., Zhongshan Univ.)

Abstract

We investigate the solvability and the solving methods of singular integral equation with hyperanalytic Cauchy kernel

$$(K\varphi)(\tau)=a(\tau)\varphi(\tau)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\kappa(\zeta,\tau)\varphi(\zeta)\mathrm{d}t(\zeta)}{t(\zeta)-t(\tau)}=f(\tau),\qquad \tau\in L,$$

where a,κ are hypercomplex functions in the sense of A. Douglis, φ is the unknown function. We prove that the equation $K\varphi=f$, under certain conditions, is Noetherian. And a direct method to solve $K\varphi=f$ when a and κ are the boundary values of hyperanalytic functions is given.