

## 关于 $n$ 维单形的一个不等式\*

冷 岗 松

(湖南平江县第七中学)

在距离几何的近期研究文献中<sup>[1-5]</sup>, 出现了许多联系着  $n$  维单形的棱长、体积、宽度等的几何不等式. 这里, 介绍我们最近建立的一个不等式.

**定理** 设从  $n$  维单形的某一顶点出发的  $n$  个棱向量分别为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $x_i$  的长度为  $\|x_i\|$ ,  $x_i$  与  $x_j$  之间的夹角为  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), 且记这个  $n$  维单形的体积为  $V$ ,  $G = \sum_{k < i} a_{ki}$ , 则

$$V \leq \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n \|x_i\| \sin^{n-1} \frac{G}{\binom{n}{2}}$$

$n=2$  时等号成立,  $n \geq 3$  时当且仅当  $\{x_i\}$  为正交集时等号成立.

为证定理, 先须证几个引理.

引理 1 
$$V = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n \|x_i\| \det^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & \cos a_{12} & \cdots & \cos a_{1n} \\ \cos a_{21} & 1 & \cdots & \cos a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos a_{n1} & \cos a_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

**引理 2** 若从  $n$  维单形某一顶点出发的  $n$  个棱向量为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 这  $n$  个向量所生成的  $n$  维超平行多面体的体积为  $V_{[x_1, x_2, \dots, x_n]}$ , 则

$$V = \frac{1}{n!} V_{[x_1, x_2, \dots, x_n]}$$

**引理 3** 设  $s_i$  是向量  $x_1, x_2, \dots, x_i$  所张成的子空间, 则

$$V_{[x_1, x_2, \dots, x_n]} = \prod_{i=1}^n \|x_i\| \prod_{i=2}^n \sin \langle x_i, s_{i-1} \rangle.$$

其中  $\langle x, s \rangle$  是向量  $x$  与子空间  $s$  所成的角.

**引理 4** 若  $T, S$  为  $R^n$  的两个子空间, 且  $T \subseteq S$ ,  $\forall x \in S$ , 则  $\sin \langle x, T \rangle \geq \sin \langle x, S \rangle$ .

**引理 5**  $V_{[x_1, x_2, \dots, x_n]} \leq \prod_{i=1}^n \|x_i\| \sin^{n-1} \frac{G_k}{n-1}$ , 其中  $G_k = \sum_{\substack{i \neq k \\ (i)}} a_{ki}$ . (转 370 页)

\* 1988年10月26日收到.

# Tensor Functor Defined on the Category ${}_R M_n'$

Liu Yuren

## Abstract

In this paper, we define a tensor functor on the category of  $R$ - $n$  modules, where  $R$  is a commutative ring with 1, and prove the following theorems:

**Theorem 1** If  $M$  is an object of  ${}_R M_n'$ , then  $(M \otimes_n \_, \text{Hom}_R(M, \_))$  is an adjoint pair.

**Theorem 2** In the category  ${}_R M_n'$ , total exactness of  $M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow \{m_0\}$  implies total exactness of  $M \otimes_n M_1 \rightarrow M \otimes_n M_2 \rightarrow M \otimes_n M_3 \rightarrow \{m_0\}$ , where  $M$  is an object of  ${}_R M_n'$ .

In addition, we discuss the category  ${}_R M_n^{y'}$  and the free  $R$ - $n$  modules.

接522页

## 参 考 文 献

- [1] 杨路、张景中, 关于有限点集的一类几何不等式, 数学学报, 23:5 (1980), 740—749.
- [2] 杨路、张景中, 度量方程应用于 Sallee 猜想, 数学学报, 26:4 (1983), 488—493.
- [3] 杨路、张景中, Neuberg-Padoe 不等式的高维推广, 数学学报, 24:3 (1981), 401—408.
- [4] 杨路、张景中, 预给二面角的单形嵌入  $E^n$  的充分必要条件, 数学学报, 26:2 (1983).
- [5] 张景中、杨路, 关于有限质点组的一类几何不等式, 中国科技大学学报, 11:2 (1981), 250—256.

# An Inequality on $n$ -Dimensional Simplex

Leng Gangsong

(No.7 Middle-school, Ping Jiang Hunan)

## Abstract

Let  $x_1, x_2, \dots, x_n$  are vectors set out from any vertex of  $n$ -simplex. The included angle of  $x_i$  and  $x_j$  is  $a_{ij}$ , and  $G = \sum_{i < j} a_{ij}$ , the volume of this simplex is

$V$ . In this paper, we prove the inequality as below:

$$V < \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n \|x_i\| \sin^{n-1} \frac{G}{\binom{n}{2}} \quad (*)$$

When  $n=2$ , the equality holds in  $(*)$ , when  $n \geq 3$ , the equality holds in  $(*)$  if  $\{x_i\}$  is orthogonal set.