第10卷 第4期 1990年11月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.10 No 4 NoV., 1990

Thiele型向量连分式的收敛性定理*

朱功勤 顾传青

（合肥工业大学数力系）

Thiele型向量连分式，不仅可用来解决一元和多元向量有理插值问题〔1-3〕，一元和多元向量切触有理插值问题〔3〕，还可用来研究向量Pade逼近及向量连分式逼近〔1,3〕。本文给出了这种连分式的收敛性定理，并把著名的Pringsheim定理推广到向量连分式上去。

§1 设由有限向量组成的叙列为$\nabla=\{\vec{v}_0,\vec{v}_1,\vec{v}_2,\cdots\}$，其中$\vec{v}_l=(v_1^{(l)},v_2^{(l)},\cdots,v_d^{(l)})$，$v_k^{(l)}\in\boldsymbol{R}$，$k=1,2,\cdots,d$，凡是本文中出现的两个向量的乘积都是数量积，即$\vec{v}_1\vec{v}_2=\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=\sum\limits_{k=1}^{d}v_k^{(1)}v_k^{(2)}$是一个数量，$(\vec{v}_1\vec{v}_2)\vec{v}_3=(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2)\vec{v}_3$是一个向量。显然，若$\vec{v}\in\nabla$且$\vec{v}\neq 0$。则必满足（i）$\vec{v}$可逆，且有Samelson逆变换：$\vec{v}^{-1}=\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}$；（ii）$\vec{v}\vec{v}^{-1}=\vec{V}^{-1}\vec{V}=1$。

设由Samelson逆变换构成的各种类型的Thiele型向量连分式的一般形式为

$$\vec{V}_0+\frac{a_1|}{|\vec{V}_1}+\frac{a_2|}{|\vec{V}_2}+\cdots=\vec{V}_0+\cfrac{a_1}{\vec{V}_1+\cfrac{a_2}{\vec{V}_2+\ddots}},\tag{1}$$

其中$\vec{V}_l\in\nabla$，且除$\vec{V}_0$外皆不是零向量，$a_l\in\boldsymbol{R}$。

设连分式（1）的第n阶渐近分式为$\vec{F}_n=\vec{V}_0+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k|}{|\vec{V}_k}$。若极根$\lim\limits_{n\to\infty}\vec{F}_n$存在（有限），设为$\vec{C}$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\vec{F}_n=\vec{C}$，其中$\vec{C}$是常向量，则称连分式（1）收敛。

§2 由连分式的等价变换（〔4, p.32—33〕）易得

引理1 $\vec{V}_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{a_k|}{|\vec{V}_k}=\vec{V}_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1|}{|a_1a_2\cdots a_k\vec{V}_k}$.

于是，我们只要考虑下列向量连分式

$$\vec{R}_1\equiv\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|\vec{b}_k}\qquad(\vec{b}_k=a_1a_2\cdots a_k\vec{V}_k\in\nabla)\tag{2}$$

的收敛性问题。

引理2 设$a_1=1,a_n=-a(1-a).0<a<1,n\geqslant 2$，则连分式$K(a_n/1)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{a_k|}{|1}$收敛。

1988年11月11日收到。

证明 设 $g(a)=a(1-a)$，得 $g'(a)=1-2a$，易见，当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$g(a)$ 取得最大值 $g(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$，即当 $n\geqslant 2$ 时，

$$|a_n|\leqslant\frac{1}{4}. \tag{3}$$

由Worpitzky定理（[4, p.94]），可知连分式 $K(a_n/1)$ 收敛.

引理3 设 $0<a<1$，$k_{0,p}=\frac{\frac{1}{4}|}{|1}-\frac{\frac{1}{4}|}{|1}-\cdots-\frac{\frac{1}{4}|}{|1}$，$K_{1,p}=\frac{a(1-a)|}{|1}-\frac{a(1-a)|}{|1}-\cdots-\frac{a(1-a)}{1}$，则

$$K_{1,p}\leqslant K_{0,p}. \tag{4}$$

证明 由（3）.得，$K_{1,p}^{(p)}=\frac{a(1-a)|}{|1}=a(1-a)\leqslant\frac{1}{4}=\frac{\frac{1}{4}|}{|1}=K_{0,p}^{(p)}$，，$K_{1,p}^{(p-1)}=\frac{a(1-a)|}{|1}-\frac{a(1-a)|}{1}=\frac{a(1-a)}{1-a(1-a)}\leqslant\frac{a(1-a)}{1-\frac{1}{4}}\leqslant\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{4}|}{|1}-\frac{\frac{1}{4}|}{|1}=K_{0,p}^{(p-1)}$

设当 $j=p,p-1,\cdots,2,1$ 时，$K_{1,p}^{(j)}\leqslant K_{0,p}^{(j)}$，

$$K_{1,p}^{(j-1)}=\frac{a(1-a)}{1-K_{1,p}^{(j)}}\leqslant\frac{a(1-a)}{1-K_{0,p}^{(j)}}\leqslant\frac{\frac{1}{4}}{1-K_{0,p}^{(j)}}=K_{0,p}^{(j-1)}$$

§ 3 在连分式（2）中设

$$R_{j,n}=\frac{1|}{|\vec{b}_j}+\cdots+\frac{1|}{|\vec{b}_n},\quad n\geqslant j.$$

定理1 设 $\{\vec{b}_n\}$ 是满足

$$|\vec{b}_{2n-1}^{-1}|\leqslant a,\quad |\vec{b}_{2n}^{-1}|\leqslant 1-a,\quad n\geqslant 1,\ 0<a<1 \tag{6}$$

的向量序列，其中 $\vec{b}_n\in\nabla$，则连分式（2）收敛.

证明

$$\begin{aligned}\vec{R}_{i,i+k}&=\frac{1|}{|\vec{b}_i}+\cdots+\frac{1|}{|\vec{b}_{i+k-2}+(\vec{b}_{i+k-1}+\vec{b}_{i+k}^{-1})^{-1}}\\&=\frac{1|}{|\vec{b}_i}+\cdots+\frac{1|}{|\vec{b}_{i+k-2}+(1+\vec{b}_{i+k-1}^{-1}\vec{b}_{i+k}^{-1})^{-1}\vec{b}_{i+k-1}^{-1}}\\&=(1+\vec{b}_i^{-1}(\cdots(1+\vec{b}_{i+k-2}^{-1}(1+\vec{b}_{i+k-1}^{-1}\vec{b}_{i+k}^{-1})^{-1}\vec{b}_{i+k-1}^{-1})^{-1}\cdots)^{-1}\vec{b}_i^{-1}\\&=(1+z_{i,k})^{-1}\vec{b}_i^{-1}.\end{aligned} \tag{7}$$

注意到 $Z_{i,k}$ 是一个数，由（3）得

$$|Z_{i,1}|=|\vec{b}_i^{-1}\vec{b}_{i+1}^{-1}|\leqslant a(1-a)\leqslant\frac{1}{4}<\frac{1}{2}.$$

由不等式：若 $|a|<1$，则 $|(1+a)^{-1}|\leqslant\frac{1}{1-|a|}$ 可得

$$|Z_{i,2}|=|\vec{b}_i^{-1}(1+\vec{b}_{i+1}^{-1}\vec{b}_{i+2}^{-1})^{-1}\vec{b}_{i+1}^{-1}|\leqslant\frac{a(1-a)}{1-a(1-a)}\leqslant\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}<\frac{1}{2}.$$

假设当 $2\leqslant k\leqslant j$ 时成立 $|Z_{i,k-1}|\leqslant\underbrace{\frac{a(1-a)|}{|1}-\cdots-\frac{a(1-a)|}{|1}}_{k-1\text{个项}}<\frac{1}{2}$，则可推出

$$|Z_{l,k}| = |\vec{b}_l^{-1}(1+Z_{l+1,k-1})^{-1}\vec{b}_{l+1}^{-1}| \leqslant \frac{a(1-a)}{1-|Z_{l+1,k-1}|}$$

$$\leqslant \underbrace{\frac{a(1-a)|}{|1} - \cdots - \frac{a(1-a)|}{|1}}_{k\text{ 个项}} < \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}. \tag{8}$$

连分式$\frac{1|}{|1} - \frac{\frac{1}{4}|}{|1} - \frac{\frac{1}{4}|}{|1} - \cdots$的第$n$阶渐近分式是$h_n = \frac{2n}{n+1}$. 由（7）,（8）和引理3，当$i$是奇数，$j$是偶数时得

$$|\vec{R}_{i,i+p}| < \frac{a|}{|1} - \frac{a(1-a)|}{|1} - \cdots - \frac{a(1-a)|}{|1} = \frac{a}{1-K_{1,p}}$$

$$< \frac{a}{1-K_{0,p}} = a\left(\frac{1|}{|1} - \frac{\frac{1}{4}|}{|1} - \cdots - \frac{\frac{1}{4}|}{|1}\right) = ah_{p+1}. \tag{9}$$

$$|\vec{R}_{j,j+p}| < \frac{1-a|}{|1} - \frac{a(1-a)|}{|1} - \cdots - \frac{a(1-a)|}{|1} = \frac{1-a}{1-K_{1,p}}$$

$$< \frac{1-a}{1-K_{0,p}} = (1-a)\left(\frac{1|}{|1} - \frac{\frac{1}{4}|}{|1} - \cdots - \frac{\frac{1}{4}|}{|1}\right) = (1-a)h_{p+1}. \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
\vec{R}_{1,n} - \vec{R}_{1,n+k} &= (1+\vec{b}_1^{-1}R_{2,n})^{-1}\vec{b}_1^{-1} - (1+\vec{b}_1^{-1}R_{2,|n+k})^{-1}\vec{b}_1^{-1} \\
&= \vec{b}_1^{-1}(1+\vec{b}_1^{-1}R_{2,n})^{-1}[1-(1+\vec{b}_1^{-1}R_{2,|n})(1+\vec{b}_1^{-1}R_{2,n+k})^{-1}] \\
&= \vec{b}_1^{-1}(1+\vec{b}_1^{-1}R_{2,n})^{-1}[1+\vec{b}_1^{-1}R_{2,n+k} - (1+\vec{b}_1^{-1}R_{2,n})](1+b_1^{-1}R_{2,n+k})^{-1} \\
&= -(R_{1,n}R_{1,n+k})(R_{2,n} - R_{2,n+k}) \\
&= (-1)^{n-1}(R_{1,n}R_{1,n+k})\cdots(R_{n,n}R_{n,n+k})R_{n+1,n+k}.
\end{aligned} \tag{11}$$

易得 $\frac{h_{n+1}}{h_n} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1$, 即当$n>1$时成立

$$h_n < h_{n+1} \tag{12}$$

由（9）,（10）,（11）和（12），终于得出

$$|\vec{R}_{1,n} - \vec{R}_{1,n+k}| < [a(1-a)]^n\left(\prod_{i=1}^{n} h_{n+1-i}h_{n+k+1-i}\right)h_k$$

$$\leqslant 4^{n-1}[a(1-a)]^n \frac{n+1}{n+2}\,\frac{n}{n+1}\cdots\frac{2}{3}\,\frac{n+k+1}{n+k+2}\cdots\frac{k+1}{k+2}\,\frac{2k}{k+1}$$

$$< \frac{a(1-a)}{n+2}\,\frac{4k}{n+k+2} < \frac{4a(1-a)}{n+2} \tag{13}$$

（13）的右端与k无关，当$n\to\infty$时，$|R_{1,n} - R_{1,n+k}|\to 0$. 于是证明了$\{R_{1,n}^{*}\}$是柯西叙列，即连分式（2）收敛.

定理2（**Pringsheim定理**）：设连分式（2）的第n阶渐近分式为$R_{1,n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1|}{|b_k}$. 若$|\vec{b}_n| \geqslant 2$, $n=1,2,\cdots$, 则连分式（2）收敛，且$|\vec{R}_{1,n}| < 1$, $n=1,2,\cdots$.

证明 由Samelson逆变换$\vec{b}_n^{-1} = \frac{\vec{b}_n}{|\vec{b}_n|^2}$得$|\vec{b}_n^{-1}| = \frac{1}{|\vec{b}_n|} \leqslant \frac{1}{2}$, $n=1,2,\cdots$, 由定理1知

连分式（2）收敛.

易见 $|\vec{R}_{1,1}| = \frac{1}{|\vec{b}_1|} \leqslant \frac{1}{2} < 1$，由（8）可得

$$|\vec{R}_{1,n}| = |(1+Z_{1,n-1})^{-1}\vec{b}_1^{-1}| \leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{2}}|\vec{b}_1^{-1}| \leqslant 1,\quad n=2,3,\cdots.$$

例 设 $\vec{R}_1 \equiv \frac{1|}{|(0,-2)} + \frac{1|}{|(-3,0)} + \frac{1|}{|(0,4)} + \cdots$

因 $|\vec{b}_n| = n+1 \geqslant 2$，$n=1,2,\cdots$，由定理 2 知 $\vec{R}_1$ 收敛．于是推出〔3, p.73〕连分式

$$(\sin 1, \cos 1) = (0,1) + \frac{1|}{|(1,0)} + \frac{1|}{|(0,-2)} + \frac{1|}{|(-3,0)} + \frac{1|}{|(0,4)} + \cdots$$

收敛.

参 考 文 献

〔1〕P. R. Graves-Morris, Vector valued rational interpolants Ⅰ, Numer. Math, 42 (1983), 331—348.

〔2〕P. R. Graves-Morris and C. D. Jenkins, Generalised inverse Vector valued rational interpolation, in: H. Werner, H. J. Bunger, Eds., Pade Approximation and its Applieation, (Spring, Berlin, 1983) 144—156.

〔3〕顾传青，向量连分式的逼近及收敛性，合肥工业大学硕士论文（1988）.

〔4〕William B. Jones and W. J. Thron, Continued Fractions. Analytic Theory and Applications, (Addision Wesley, London, 1980).

Convergence Theorems for Thiele type Vector Continued Fractions

Zhu Gongqin　　*Gu Chuanqing*

(Hefei polytechnic University)

Abstract

In this paper, two Convergence theorems are proven for Vector Continued fractions of the form $\vec{R}_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1|}{|\vec{b}_k}$, where $\vec{b}$ satisfy Samelson inverse.