第10卷 第4期 1990年11月
数学研究与评论 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.10 No.4 Nov., 1990

关于增正全连续凹算子不动点指数*

丁 方 允

(兰州大学数学系)

M. A. Krasnosel'skii和P. P. Zabreiko在[1]中证明了，线性正全连续算子关于含零元θ的有界域Ω的不动点指数只可能为0或1. 文[2]对s次($0<s<1$)齐次增正全连续算子给出了同样的结论。本文取掉齐次性，证明了凹的增正全连续算子也有如上结论成立。考虑到使用方便，对[2]中引理3作了一些改动，顺便也得到与[2]相同结论。

设E是带锥K的半序Banach空间(OBS). $\dot{K}$表示$K\setminus\{\theta\}$.

设$W:K\to\dot{K}$，l为自然数，a为正常数。那么，E上s次齐次增正算子A称为(w, a, l)囿下的，如果满足

$$A^l wx \geqslant awx, \quad \forall x\in K. \tag{1}$$

引理 设Ω是OBS空间E中的有界开集，$\theta\bar{\in}\partial\Omega$. $B: K\cap\overline{\Omega}\to K$全连续。如果

(i) $W:K\to\dot{K}$全连续，且

$$\inf_{x\in\partial\Omega\cap K}\|Wx\|>0. \tag{2}$$

(ii) $Bx\geqslant Ax$, $\forall x\in\partial\Omega\cap K$，其中$A$为$E$上的$s$次齐次增的正算子，$0<s<1$，且为$(W, a, l)$囿下的；

(iii) $Bx\neq\mu x$，当$\mu\in[0,1]$，$x\in\partial\Omega$时，

或

(iii)′ $\exists\gamma>0$，使得任何$x\in\partial\Omega\cap K$有

$$x\geqslant\gamma Wx \tag{3}$$

且$Bx\neq\mu x$，$\mu\in[\gamma^{s-1}a^{1/\sigma_l}, 1]$，$x\in\partial\Omega\cap K$，其中$\sigma_l=1+s+\cdots+s^{l-1}$. (如果$\gamma^{s-1}a^{1/\sigma_l}>1$，则条件(iii)′自动取消。)

则 $$i(B, \Omega\cap K, K)=0.$$

证明 构造逼近算子

$$B_n x=Bx+\frac{1}{n}Wx, \quad x\in\overline{\Omega}\cap K, \quad n=1,2,\cdots.$$

显然$B_n:\overline{\Omega}\cap K\to K$全连续。首先证

$$\inf_{x\in\partial\Omega\cap K}\|B_n x\|>0, \quad n=1,2,\cdots. \tag{4}$$

用反证法，设存在自然数n_0及序列$\{x_k\}\subset\partial\Omega\cap K$，使$B_{n_0}x_k\to\theta\,(k\to\infty)$，即$Bx_k+\frac{1}{n_0}Wx_k\to$

* 1989年9月9日收到.

θ．由$\{x_k\}$的有界性，B和W的全连续性，不妨设$k\to\infty$时，$Bx_k\to y$，则$Wx_k\to -n_0y(k\to\infty)$．由$Bx_k\in K$及$Wx_k\in K$，$k=1,2,\cdots$，得$y\in K$，$-n_0y\in K$．从而$y=\theta$．那么$Wx_k\to\theta(k\to\infty)$．但这与假设矛盾，（4）式得证．

其次证，当n充分大时，

$$B_nx\neq\mu x,\quad \mu\in[0,1],\quad x\in\partial\Omega\cap K \tag{5}$$

当$\mu=0$时，对（5）的证明转为证：

$$B_nx\neq\theta,\quad x\in\partial\Omega\cap K.$$

由（4）可立即推出这个事实。

以下对$\mu\in(0,1]$给出证明。仍用反证法。设$\exists n_k$及$\mu_k\in(0,1]$和$x_k\in\partial\Omega\cap K$，使得$B_{n_k}x_k=\mu_kx_k$．于是

$$x_k=\frac{1}{\mu_k}Bx_k+\frac{1}{\mu_kn_k}Wx_k. \tag{6}$$

如果我们能证实

$$\inf_k\mu_k>0, \tag{7}$$

则由（6）可推出与假设（iii）矛盾的结果，引理便可得证。

因B是正算子，由（6）得$x_k\geqslant\dfrac{1}{\mu_kn_k}Wx_k$，从而$\exists t_k\geqslant\dfrac{1}{\mu_kn_k}>0$，使$x_k\geqslant t_kWx_k$；对$t>t_k$，$x_k\overline{\geqslant}tWx_k$．由$A$的性质

$$A^lx_k\geqslant t_k^{s^l}A^lWx_k\geqslant at_k^{s^l}Wx_k；$$

另一方面，$\mu_kx_k\geqslant Bx_k\geqslant Ax_k$，由$A$的$s$齐次性

$$A^lx_k\leqslant\mu_k^{1+s+s^2+\cdots+s^{l-1}}x_k.$$

故

$$x_k\geqslant\frac{at_k^{s^l}}{\mu_k^{1+s+s^2+\cdots+s^{l-1}}}Wx_k.$$

由t_k的构造，容易推得

$$\mu_k^{1+s+s^2+\cdots+s^{l-1}}\geqslant\frac{a}{t_k^{1-s^l}},$$

即

$$\mu_k\geqslant\frac{a^{1/(1+s+\cdots+s^{l-1})}}{t_k^{1-s}} \tag{8}$$

如果$\{t_k\}$有上界，则从上式推得（7）．现设$t_k\to+\infty$，$k\to+\infty$．由$x_k\geqslant t_kWx_k$推知$Wx_k\to\theta$，$k\to+\infty$．但这与假设（i）矛盾。由此（7）成立。令$c=\inf\limits_k\mu_k$．于是存在数列$\{\mu_k\}$的子列在$[c,1]$中收敛。不妨令$\mu_k\to\mu_0$．设$\dfrac{1}{\mu_0}Bx_k\to x_0$．注意到$W$的有紧性，可得

$$x_k=\frac{1}{\mu_k}Bx_k+\frac{1}{\mu_kn_k}Wx_k\to x_0.$$

由$x_k\in\partial\Omega\cap K$，$k=1,2,\cdots$，得$x_0\in\partial\Omega\cap K$．于是有

$$\mu_0x_0=Bx_0,\quad \mu_0\in(0,1],\quad x_0\in\partial\Omega\cap K.$$

它与假设（iii）矛盾。到此（5）得证。

最后，由（2）和（4）两式得

$$i(B_n,\Omega\cap K,K)=0,\ (n\text{充分大}).$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\partial\Omega\cap K}\|Bx-B_nx\|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\partial\Omega\cap K}\left\|\frac{1}{n}Wx\right\|=\sup_{x\in\partial\Omega\cap K}\|Wx\|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

所以据不动点指数的性质

$$i(B,\Omega\cap K,K)=\lim_{n\to\infty}i(B_n,\Omega\cap K,K)=0.$$

以上是在假设(i)—(iii)的条件证明的；如果将(iii)换作(iii)′，可由t_k的定义(见(4)式)知$t_k\leqslant\gamma$，$k=1,2,\cdots$，并且由(8)式得

$$\mu_k\geqslant\gamma^{s-1}a^{\sigma_l},\quad k=1,2,\cdots$$

所以

$$\inf_k\mu_k\geqslant\gamma^{s-1}a^{\sigma_l}.$$

即(7)式成立。余下证明完全一样。 ■

注 这个引理是[2]中引理3的改进。因为在引理中的假设(i)在使用中要较[2]引理3中的条件

$$\inf_{x\in\partial\Omega\cap K}\|P_+x+Bx\|>0,\tag{9}$$

便于检验，(9)式中$B:K\cap\overline{\Omega}\to K$全连续，$P=P_+-P_-$，其中$P_+$，$P_-$: $K\to K$为正算子且$-Px\bar{\in}K$，$\forall x\in K$.

定理1 设Ω为E中有界开集，$\theta\bar{\in}\partial\Omega$，$B:\overline{\Omega}\cap K\to K$全连续，$A$为$E$上的增正算子，那么若$Bx\geqslant Ax$，$x\in\partial\Omega\cap K$.

(i) $Bx\neq\mu x$，$\mu\in[0,1]$，$x\in\partial\Omega\cap K$且A为s次齐次算子；

或(i)′ $Bx\neq x$，$x\in\partial\Omega\cap K$且A为齐次算子.

(ii) $\exists u\in\partial\Omega\cap K$,使$A^lu\geqslant u$，$l$是某个自然数。见$i(B,\Omega\cap K,K)=0$.

证明 令$Wx\equiv u$，$x\in\overline{\Omega}\cap K$. 显然$W:\overline{\Omega}\cap K\to K$全连续，并满足引理的假设(i). 在定理的条件(i)和(ii)下，容易检验引理的假设(ii)，(iii)成立。由此定理结论成立。若定理条件(i)′和(ii)成立，这时只要注意到$s=1$，$a=1$，从而$\gamma^{s-1}a^{\sigma_l}=1$，故$Bx\neq x$，$x\in\partial\Omega\cap K$可保证引理的(iii)′成立，从而定理结论也成立。 ■

由定理1可得s齐次$(0<s\leqslant1)$增正全连续算子不动点指数定理.

推论1[2] 设Ω是E中有界开集，$\theta\in\Omega$ ·B为锥K上的单调增正算子，$B:\overline{\Omega}\cap K\to K$全连续。如果:

(i) B为s次齐次的，$0<s\leqslant1$,并且$Bx\neq\mu x$，$x\in\partial\Omega\cap K$，$\mu\in[0,1]$；或

(ii) B为齐次的，并且$Bx\neq x$，$x\in\partial\Omega\cap K$.

则 (a) $i(B,\Omega\cap K,K)=0$ 当且仅当 $\exists u\in\partial\Omega\cap K$，使$Bu\geqslant u$；

(b) $i(B,\Omega\cap K,K)=1$ 当且仅当 $\forall x\in\partial\Omega\cap K$，$Bx\ngeqslant x$.

证明 若$\exists u\in\partial\Omega\cap K$，使$Bu\geqslant u$，则取$Wx\equiv u$，$x\in\overline{\Omega}\cap K$. 显然$W:\overline{\Omega}\cap K\to K$全连续并且引理的假设(i)被满足。令$Ax\equiv Bx$. 由$Bu\geqslant u$，知$A$是$s$次齐次的$(W,1,1)$囿下的增正算子。可见引理的条件(i)—(iii)均满足，故$i(B,\Omega\cap K,K)=0$.

若对$\forall x\in\partial\Omega\cap K$，$Bx\ngeqslant x$，则由[3]的引理3知$i(B,\Omega\cap K,K)=1$.

由于对$\partial\Omega\cap K$上的x只可能出现上述两种情形，所以结论(a)，(b)成立. ■

下面我们借助算子凹性，来讨论非齐次增正全连续算子的不动点指数。

半序Banach空间E上的算子称作是凹的(或称关于u_0是凹的)，如果存在那样的元素$u_0 \in \dot{K}$使

（i） 对$\forall x \in \dot{K}$，$\alpha u_0 \leqslant Ax \leqslant \beta u_0$，其中$\alpha,\beta$是依赖于$x$的正数；

（ii）对每个$x \in K$，只要$\alpha_1 u_0 \leqslant x \leqslant \beta_1 u_0$，$\alpha_1/\beta_1$是与$x$有关的正数，关系式

$$A(tx) \geqslant tAx,\quad 0<t<1$$

成立。

定理 2 设Ω是E中有界开集，$\theta \bar{\in} \partial\Omega$．$B:\overline{\Omega}\cap K \to K$全连续．如果

（i） A是关于u_0为凹的增正算子，$u_0 \in \dot{K}$；

（ii） $Bx \geqslant Ax$，$\forall x \in \partial\Omega\cap K$；

（iii） $Bx \neq \mu x$，$\mu \in [0,1]$，$x \in \partial\Omega \cap K$．

则$i(B,\Omega\cap K,K)=0$．

证明 首先来说明，$\exists v_0 \in \dot{K}$，使对$\forall x \in \partial\Omega\cap K$，有$x \overline{\geqslant} v_0$并且$A$关于$v_0$为凹算子．其实由$\overline{\Omega}$有界及$x \in K$，知存在$\gamma>0$，使对$\forall x \in \partial\Omega\cap K$，有$x \overline{\geqslant} \gamma u_0$．令$v_0=\gamma u_0 \in K$，上面结论是显然的．

其次构造全连续算子序列

$$B_n x = Bx + \frac{1}{n}Wx,\quad n=1,2,\cdots,\quad x \in \overline{\Omega}\cap K,$$

其中要求$W:K \to \dot{K}$全连续且引理的假设(i)成立(比如取$Wx \equiv u$，$u \in \partial\Omega\cap K$就满足上述要求)．如证引理那样，我们将证明，当$n$充分大时，$i(B_n,\Omega\cap K,K)=0$．为此要证（4），（5）成立．因（2）成立，故（4）成立(见引理证明)；因（4）成立，故要想证（5）成立，只需就$\mu \in (0,1]$给出证明．事实上，若存在自然数n_k和$\mu_k \in (0,1]$及$x_k \in \partial\Omega\cap K$，使$B_{n_k}x_k = \mu_k x_k$．如能说明（7）式成立，与引理的证明一样，引出与引理假设(iii)相矛盾的事实，从而定理得证．因此转而证明（7）式成立．其实，因A关于v_0是凹算子，对$x_k \in \partial\Omega\cap K \subset \dot{K}$，$\exists \alpha_k>0$使得$Ax_k \geqslant \alpha_k v_0$．由$\mu_k x_k \geqslant Bx_k \geqslant Ax_k \geqslant \alpha_k v_0$得，$x_k \geqslant \dfrac{\alpha_k}{\mu_k}v_0$．故$\exists t_k \geqslant \dfrac{\alpha_k}{\mu_k}>0$，使$x_k \geqslant t_k v_0$，但对$t>t_k$，$x_k \overline{\geqslant} tv_0$．由于对任何$x \in \partial\Omega\cap K$，$x \overline{\geqslant} v_0$，推出$t_k \in (0,1)$．因为$A$关于$v_0$是凹的增正算子，故

$$\mu_k x_k \geqslant Ax_k \geqslant A(t_k v_0) \geqslant t_k A v_0 .$$

因$v_0 \in \dot{K}$，则$\exists a>0$，使$Av_0 \geqslant av_0$．从而

$$x_k \geqslant \frac{at_k}{\mu_k} v_0 .$$

据t_k的构造得

$$t_k \geqslant \frac{at_k}{\mu_k}$$

进而$\mu_k \geqslant a>0$，$\forall k$．至此（7）式成立． ■

推论 2 设$B:\overline{\Omega}\cap K \to K$全连续增正的凹算子．若对$\forall x \in \partial\Omega\cap K$，$Bx \overline{\leqslant} x$，则$i(B,\Omega\cap K,K)=0$．

证明 令$Ax \equiv Bx$，$x \in \overline{\Omega}\cap K$，因此定理2中有关$A$的条件均已满足，剩下只需验证条件(iii)成立．若不然，有$\mu_0 \in [0,1]$，$x_0 \in \partial\Omega\cap K$，使$Bx_0=\mu_0 x_0$，则$Bx_0 \leqslant x_0$，此与假设矛

盾．■

定理 3 设Ω为E中有界开集，$\theta\in\Omega$，$B:\overline{\Omega}\cap K\to K$增正全连续算子，$Bx\neq x$，$x\in\partial\Omega\cap K$．又设对每个$x\in\partial\Omega\cap K$有

$$(x-K)\cap(\partial\Omega\cap K)=\{x\}. \tag{10}$$

最后设$u_0\in\dot{K}$，A关于u_0为凹算子且$\exists w\in\dot{K}$，使$Aw\leqslant w$．那么若$Bx<Ax$，$x\in\partial\Omega\cap K$，则$i(B,\Omega\cap K,K)=1$．

证明 只要证明$Bx\neq\mu x$，$x\in\partial\Omega\cap K\quad\mu>1$． (11)

若不然，$\exists x_0\in\partial\Omega\cap K$，$\mu_0>1$，使$Bx_0=\mu_0x_0$．注意$x_0\neq w$，因为不然

$$w<Bw=\mu_0w\leqslant Aw$$

这与$Aw\leqslant w$矛盾．由

$$Ax_0\geqslant Bx_0=\mu_0x_0\geqslant x_0$$

及A关于u_0为凹算子，有$\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2>0$使

$$\alpha_1u_0\leqslant Ax_0\leqslant\beta_1u_0,\quad \alpha_2u_0\leqslant Aw\leqslant\beta_2u_0.$$

于是我们有

$$x_0\leqslant\beta_1u_0\leqslant\frac{\beta_1}{\alpha_2}w,$$

从而$\exists t_0\in(0,\frac{\beta_1}{\alpha_2})$，使$x_0\leqslant t_0w$，但对$t<t_0$，$x_0\overline{\leqslant}tw$．据(10)可得$x_0\overline{\leqslant}w$，因为若$x_0\leqslant w$,于是$x_0\in w-K$，所以$x_0\in(w-K)\cap(\partial\Omega\cap K)=\{w\}$，即$x_0=w$，但这与$x_0\neq w$矛盾．由$x_0\leqslant w$，知$t_0>1$．据$A$的凹性这时有

$$A(t_0w)\leqslant t_0Aw.$$

所以有

$$x_0\leqslant\frac{1}{\mu_0}Ax_0\leqslant\frac{1}{\mu_0}A(t_0w)\leqslant\frac{t_0}{\mu_0}Aw\leqslant\frac{t_0}{\mu_0}w,$$

这与t_0的定义矛盾，故(11)式成立．

所以 $i(B,\Omega\cap K,K)=1$． ■

注 满足条件(10)的有界开集Ω是很多的，比如Ω是以零元为心的开球．

推论 3 设Ω为E的有界开集，$\theta\in\Omega$并且对每个$x\in\partial\Omega\cap K$，$(x-K)\cap(\partial\Omega\cap K)=\{x\}$．$B:\overline{\Omega}\cap K\to K$全连续增正，$Bx\neq x$，$x\in\partial\Omega\cap K$．又设$u_0\in\dot{K}$，$B$是关于$u_0$的凹算子．假定存在$w\in\partial\Omega\cap K$，使$Bw\leqslant w$，则$i(B,\Omega\cap K,K)=1$．

该推论是定理3的特殊情形，证明略．

结合推论2和推论3便得增正全连续凹算子不动点指数定理．

推论 4 设Ω是E中有界开集，$\theta\in\Omega$并且对每个$x\in\partial\Omega\cap K$，有$(x-K)\cap(\partial\Omega\cap K)=\{x\}$．$B:\overline{\Omega}\cap K\to K$增正全连续，$Bx\neq x$，$x\in\partial\Omega\cap K$．又设$u_0\in\dot{K}$，$B$关于$u_0$是凹算子，那么$i(B,\Omega\cap K,K)$只可能为0或1：

(i) $i(B,\Omega\cap K,K)=0$，当且仅当对$\forall x\in\partial\Omega\cap K$，$Bx\overline{\leqslant}x$；

(ii) $i(B,\Omega\cap K,K)=1$当且仅当$\exists x\in\partial\Omega\cap K$，$Bx\leqslant x$．

证明 设对$\forall x\in\partial\Omega\cap K$，$Bx\overline{\leqslant}x$．由推论2知$i(B,\Omega\cap K,K)=0$；反之，假定$i(B,\Omega\cap K,K)=0$，且存在$x\in\partial\Omega\cap K$，使$Bx\leqslant x$，则由推论3知$i(B,\Omega\cap K,K)=1$，这与假定

矛盾，从而(i)成立．(ii)的证明相仿． ∎

参 考 文 献

[1] M. A. Krasnosel'skii and P. P. Zabreiko. Geometrical Methods of Nonlinear Analysis (Russian), Moscow, 1975.

[2] 杜一宏，关于正算子的不动点指数，数学杂志，6(1986)．

[3] 郭大钧，关于锥映象的几个不动点定理，科学通报，24(1979)．

On Several Theorems of Fixed Point Index for Complely Positively Concave Increasing Operator

Ding Fangyun

(Lanzhou University)

Abstract

In this paper, we have proved that fixed point index of completily continuous positively concave increasing operator on bounded domain Ω which contains zero point is only O or 1.

Key words: cone, semi-order Banach space, fixed point index, completely continuos operator, concave operator.