第10卷　第4期
1990年11月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.10 No.4
Nov., 1990

反向极限与模的 *FP*-内射包*

王　芳　贵

（南京大学数学系）

设 R 是任何环，左 R-模 A 叫作 FP-内射模，如果对任何有限表现模 F，$\mathrm{Ext}^1_R(F, A)=0$．FP-内射模成功地刻划了凝聚环的性质[3] 因而越来越受到人们的关注．众所周知，任何模均有一个内射包（in jective hull）．本文利用反向极限函子，证明了任何模 A 在它的内射包 $E_R(A)$ 中，一定有一个包含 A 的最小的 FP-内射子模，因而是唯一确定的，它可用来定义为 A 的 FP-内射包．

记号与说明　本文中的环均指凝聚环，除特殊声明外，模均指左模．$\mathbf{M}(R)$ 表示 R-模范畴，$\underleftarrow{L}(r,R)$ 与 $\underrightarrow{L}(r,R)$ 分别表示定向集 r 上的 R-模的反向极限范畴及正向极限范畴．$E_R(A)=R$-模 A 的内射包．

一个偏序集 r 称为定向集（directed set），如果对任何 $i,j\in r$，恒有 $t\in r$，使 $i,j<t$．以下 r 恒指定向集．

命题1　设 $\{P_i,\varphi_{ij}\}\in\underrightarrow{L}(r,R)$，$\{A_i,\psi_{ij}\}\in\underleftarrow{L}(r,R)$，$g=\{g_i:P_i\to A_i \mid i\in r\}$ 是从 $\{P_i,\varphi_{ij}\}$ 到 $\{A_i,\psi_{ij}\}$ 的态射（morphism）．即 $g_i=\psi_{ij}g_j\varphi_{ij}$，$i<j$，则存在同态 g：$\varinjlim\{P_i,\varphi_{ij}\}=\{P,a_i\}\longrightarrow\varprojlim\{A_i,\psi_{ij}\}=\{A,\beta_i\}$，使左图成为一个可换图．

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rrr, dashed, "g"] & & & A \arrow[dl, "\beta_i"'] \arrow[ddl, bend left=10, "\beta_j"] \\
& P_i \arrow[ul, "a_i"'] \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "\varphi_{ij}"] & A_i & \\
& P_j \arrow[uul, bend left=10, "a_j"] \arrow[r, "g_j"'] & A_j \arrow[u, "\psi_{ij}"'] &
\end{tikzcd}$$

证明　首先有 $P=\bigoplus\limits_i P_i/D$，$D$ 是 $\bigoplus\limits_i P_i$ 中子集 $\{x_i-\varphi_{ij}x_i \mid i<j, x_i\in P_i\}$ 生成的子模，a_i：$P_i\to\bigoplus\limits_i P_i\to P$ 是自然同态；$A=\{(a_i)\in\prod\limits_i A_i \mid a_i=\psi_{ij}a_j, i<j\}$，$\beta_i$：$A\to\prod\limits_i A_i\to A_i$ 是射影映射[1]．对 $x\in P$，存在 $i\in r$，$x_i\in P_i$，使 $x=a_0x_0$．令 g：$P\to A$，$g(x)=(a_j)\in\prod\limits_j A_j$，其中 $a_i=g_ix_i$，对 $j\in r$，取 $t\in r$，使 $i,j<t$．这时，令 $a_j=\psi_{jt}g_t\varphi_{it}x_i$．

（1）a_j 与 t 的选取无关．

因若 $i\leqslant t,t'$，$j<t,t'$，则又有 $s\in r$．使 $t,t'<s$．从而 $\psi_{js}g_s\varphi_{is}x_i=\psi_{it}\psi_{ts}g_s\varphi_{ts}\varphi_{is}x_i=\psi_{it}g_t\varphi_{it}x_i$．类似地有，$\psi_{js}g_s\varphi_{is}x_i=\psi_{it}g_{t'}\varphi_{it'}x_i$．

* 1988年12月7日收到，国家自然科学基金会资助项目．

（2） g是完全确定的.

若$a_ix_i=0$, 则存在$t>i$, 使$\varphi_{it}x_i=0$. 对任何$j\in r$，存在$s\in r$，使$j,t<s$. 故$a_j=\psi_{js}g_s\varphi_{is}x_i=\psi_{js}g_s\varphi_{ts}\varphi_{it}x_i=0$. $g(x)=0$. 故g完全确定.

注 易见g也是唯一确定的.

引理 2 若$N_0=P\oplus B$, A_1,A_2是B的子模，且$N_1=P\oplus A_1, N_2=P\oplus A_2$，则$N_1\cap N_2=P\oplus(A_1\cap A_2)$.

证明 $x\in N_1\cap N_2$, 则$x=y+a_1$，$x=z+a_2$，$y,z\in P$. $a_1\in A_1, a_2\in A_2$，故$y-z=a_2-a_1\in B\cap P=0$；$a_1=a_2\in A_1\cap A_2$，$x\in P\oplus(A_1\cap A_2)$；$N_1\cap N_2\subseteq P\oplus(A_1\cap A)$. 从而$N_1\cap N_2=P\oplus(A_1\cap A_2)$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & N_0 \arrow[r] & P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

引理 3 设B是FP-内射模. A_1,A_2是B的FP-内射子模. 且$E_R(A_1\cap A_2)=E_R(B)$. 则$A_1\cap A_2$也是B的FP-内射子模.

证明 设$A=A_1\cap A_2$，只要证明任何正合列$0\to A\to N\to P\to 0$（P是任何有限表现模）是分裂的(splitting)就行了[1]. 构造推出上图(polshout). 其中$N_0=B\oplus N/W$、$W=\{(a,-a)|a\in A\}$. 令$N_i=A_i\oplus N/W\subseteq N_0$，$i=1,2$. 则有左面的推出图.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_i \arrow[r] & N_i \arrow[r] & P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

由于A_1,A_2,B是FP-内射模，我们有$\mathrm{Ext}'_R(P,A_i)=0$, $\mathrm{Ext}'_R(P,B)=0$, 从而正合列$0\longrightarrow A_i\longrightarrow N_i\longrightarrow P\longrightarrow 0$及$0\longrightarrow B\longrightarrow N_0\longrightarrow P\longrightarrow 0$分裂. 视$B,N,N_i$为$N_0$的子模,$R$是凝聚环. 我们有$N_0=P\oplus B$, $N_i=P\oplus A_i$. 由引理2, $N_1\cap N_2=P\oplus A$. 由于下图的可换性，故$N=N_1\cap N_2$，即$N=P\oplus A$. 从而$\mathrm{Ext}'_R(P,A)=0$, A是FP-内射模. ■

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & N \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & N_1\cap N_2 \arrow[r] & P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

若$A_i\subseteq B$，且$i<j$时，$A_j\subseteq A_i$，则取ψ_{ij}为A_j到A_i的嵌入映射，$\varprojlim\{A_i,\psi_{ij}\}=\{\bigcap\limits_i A_i,\beta_i\}$，其中$\beta_i$: $\bigcap\limits_i A\longrightarrow A_i$也是嵌入映射.

引理 4 设$\{A_i,\psi_{ij}: A_j\to A_i\}$是$FP$-内射模$B$的子模的反向系，$A=\bigcap\limits_i A_i$, 且$E_R(A)=E_R(B)$，$P$是有限表现模. 若对任何$i\in r$, $\mathrm{Ext}'_R(P,A_i)=0$, 则$\mathrm{Ext}'_R(P,A)=0$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\beta_i"'] \arrow[dr, phantom, "I"] & N \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\beta'_i"] & P \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_i \arrow[r, "\lambda_i"] & N_i \arrow[r, "\pi_i"] & P \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_j \arrow[r, "\lambda_j"] \arrow[u, "\psi_{ij}"] & N_j \arrow[r, "\pi_j"] \arrow[u, "\psi'_{ij}"] & P \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0
\end{tikzcd}$$

证明 设$0\to A\xrightarrow{\lambda}N\xrightarrow{}P\to 0$是任何正合列, 我们亦仅证该正合列是分裂的就行了. 对任何$i<j$，考虑左面的可换图. 其中行是正合列，对任何i，I是推出图. 更明确地，设$N_0=B\oplus N/W$, $W=\{(a,-a)|a\in A\}$，$N_i=A_i\oplus N/W$. $\beta'_i(n)=\overline{(0,n)}$，$\lambda_i(a_i)=\overline{(a_i,0)}$, $\psi'_{ij}\overline{(a_j,n)}=\overline{(\psi_{ij}a_j,n)}=\overline{(a_j,n)}$，$i<j$，$a_i\in A_i$, $a_j\in A_j$, $n\in N$, 且$\pi_i\overline{(a_i,n)}=\pi(n)$. 于是有一个同态$\theta$: $N\to\varprojlim\{N_i,\psi'_{ij}\}$，$\theta(n)=(\beta'_i(n))=(\overline{(0,n)})$. 显然$\theta$是单同态. 即$N\subset\bigcap\limits_i N_i$.

若$x=(\overline{(a_i,n_i)})\in\varprojlim N_i(a_i\in A_i, n_i\in N)$，则$i<j$时有$\overline{(a_i,n_i)}=\overline{(a_j,n_j)}$，故有$a\in A$, 使$(a_i-a_j,n_i-n_j)=(a,-a)$. 从而在$N_0$中，$a_i+n_i=a_j+n_j$成立. 由$r$是定向集，故$a_i+n_i=a_j+n_j$对任何$i,j\in r$成立. 从而$a_i+n_i\in\bigcap\limits_j N_j$. 于是$a_i\in\bigcap\limits_j N_j$，$\forall j\in r$. 对任何$t\in r$, $a_i\in N_t$,

故可设在N_t中，有 $\overline{(a_i,0)}=\overline{(b_t,m_t)}$，$b_t\in A_t$，$m_t\in N$. 即 $(a_i-b_t,-m_t)=(b,-b)$，$b\in A$.故 $a_i=b_t+b\in A_t$. 即 $a_i\in\bigcap_t A_t=A$, $i\in r$, $a_i+n_i=n\in N$，且与 i 的选取无关. 令 θ': $\varprojlim N_i\to N$, $\theta'(x)=a_i+n_i$，由上所述，θ'是完全确定的. 若$\theta'(x)=a_i+n_i=0$, 则 $x=(\overline{(a_i,n_i)})=(\overline{(a_i,-a_i)})=0$, θ'是单同态. 又从$\theta'\theta=1_N$知θ'是满同态. 从而 $N\cong\varprojlim N_i$，即 $N=\bigcap_i N_i$.

由于$\mathrm{Ext}'_R(P,A_i)=0$, $i\in r$. 故$0\to A_i\to N_i\to P\to 0$为分裂的正合列，从而$N_i\cong A_i\oplus P$，$\varprojlim N_i\cong\varprojlim A_i\oplus P$, $N\cong A\oplus P$. 从而 $0\to A\to N\to P\to 0$ 是分裂正合列. 由N的任意性知 $\mathrm{Ext}'_R(P,A)=0$. ■

推论 5 设 $\{A_i,\psi_{ij}: A_j\to A_i\}_r$是$FP$-内射模$B$的$FP$-内射子模的反向系，$r$是定向集，则 $A=\bigcap_{i\in r}A_i$ 也是B的 FP-内射子模. ■

定理 6 对任何 $A\in\mathbf{M}(R)$，在 $E_R(A)$ 中有一个最小的 FP-内射子模 $e_R(A)\supseteq A$.

证明 令$r=\{B\subseteq E_R(A)\mid A\subseteq B$，且$B$是$FP$-内射模$\}$. $E_R(A)\in r$，r 非空. 规定 r 的序为 $B<B'$当且仅当 $B\supseteq B'$. 由引理 3，r是定向集，令$e_R(A)=\bigcap_{B\in r}B$，则$e_R(A)$ 就是包含A的最小的FP-内射子模. ■

由于$E_R(A)$是唯一确定的，故 $e_R(A)$ 也是唯一确定的.

定义 $e_R(A)=\bigcap\{B\subseteq E_R(A)\mid A\subseteq B$，且$B$是$FP$-内射模$\}$，称为$A$的$FP$-内射包.

注 由于$B\hookrightarrow E_R(B)$，故引理 3 及引理 4 假设“B为FP-内射”条件可免去.

定理 7 对任何模族 $\{A_i\}_{i=1}^n$, $e_R(\bigoplus_{i=1}^n A_i)=\bigoplus_{i=1}^n e_R(A_i)$.

证明 在$E_R(A)$中，$A_i\subseteq\bigoplus_{i=1}^n A_i$，故 $e_R(A_i)\subseteq e_R(\bigoplus_{i=1}^n A_i)$. 从而$\bigoplus_{i=1}^n e_R(A_i)\subseteq e_R(\bigoplus_{i=1}^n A_i)$，另一方面，$\bigoplus_{i=1}^n A_i\subseteq\bigoplus_{i=1}^n e_R(A_i)$，$\bigoplus_{i=1}^n e_R(A_i)$是$FP$-内射模，故 $e_R(\bigoplus_{i=1}^n A_i)\subseteq\bigoplus_{i=1}^n e_R(A_i)$. ■

命题 8 对环R，以下条件等价：

(i) R是半遗传环.

(ii) 对任何模A，A中任何两个FP-内射子模之和仍是FP-内射模.

(iii) 对任何模A及A的任何两个子模A_1, A_2，有 $e_R(A_1+A_2)=e_R(A_1)+e_R(A_2)\subseteq e_R(A)$.

证明 (i)⇒(ii)，设 A_1, A_2是A的FP-内射子模，由正合列$0\to A_1\cap A_2\to A_1\oplus A_2\to A_1+A_2\to 0$及 [2,Th.2] 知 A_1+A_2是FP-内射模.

(ii)⇒(i) 设A是FP-内射模，$A_1\hookrightarrow A$. 令 $B=A\oplus A$，$B_1=\{(a,a)\mid a\in A\}$，则$0\to B_1\to B\to B/B_1\to 0$ 正合且 $B/B_1=\bar{A}_1+\bar{A}_2$，$\bar{A}_1=\{(a,0)+B_1\mid a\in A\}\cong A$，$\bar{A}_2=\{(0,a)+B_1\mid a\in A\}\cong A$，由假设 $\bar{A}_1+\bar{A}_2$ 是FP-内射模，故$(B/B_1)/\bar{A}_1\cong A/A_1$是$FP$-内射模，从而$R$是半遗传环.

(ii)⇒(iii) A_1, $A_2\subseteq A$，则在$e_R(A)$中，$e_R(A_1)+e_R(A_2)$是FP-内射子模. 由A_1, $A_2\subseteq e_R(A_1)+e_R(A_2)$，故 $e_R(A_1+A_2)\subseteq e_R(A_1)+e_R(A_2)$. 另一方面，$e_R(A_1)$, $e_R(A_2)\subseteq e_R(A_1+A_2)$，故 $e_R(A_1)+e_R(A_2)\subseteq e_R(A_1+A_2)$. 得 $e_R(A_1+A_2)=e_R(A_1)+e_R(A_2)$.

(iii)⇒(ii) 显然.

设 φ: $R \to T$是环同态，T_R是平坦模，则对任何 $A \in \mathbf{M}(T)$，$P \in \mathbf{M}(R)$，我们有 $\mathrm{Ext}_R^n(P, A) \cong \mathrm{Ext}_T^n(T \underset{R}{\otimes} P, A)$，$n > 0$，从而得

命题9 若 φ: $R \to T$是环同态。且T_R是平坦模．则 A 是 FP-内射 T-模 $\Rightarrow A$ 是 FP-内射 R-模． ■

若上面 $T = R_s$，S是R的一个乘法封闭子集，则我们易证

命题10 设 $A \in \mathbf{M}(R_s)$，如果 A 是 FP-内射 R_s-模，则 A 是 FP-内射 R-模． ■

命题11 若 R 是整环，$A \in \mathbf{M}(R)$，且 A 是非挠的（Forsionfree），则 $e_R(A) = E_R(A) = Q \underset{r}{\otimes} A$，其中 Q 是 R 的商域．

证明 由非挠的可除模是内射模即得． ■

参 考 文 献

[1] Rotman, J.J., An Introduction to Homological Algebra, Academic Press, 1979,

[2] Megibben, C., Absolutely pure modules, Proc. AMS, 26(1970), 561—566.

[3] Stenstrom, B., Coherent rings and FP-injective modules, J. Lundon Math. Soc., 2(1970), 323—229.

[4] Damiano, R. F., Coflat rings and modules, Pac.J. Math., 81(1979), 349—369.

[5] Matlis, E., Injective modules over noetherian rings, Pac. J. Math. 8(1958), 511—528.

[6] Jensen, C. U., On the Vanishing of $\varprojlim^{(i)}$, J. Alg., 15(1970), 151—528.

[7] McDonald, B. R., Linear Algebra over Commutative Rings, Marcel Dekker, Inc., 1984.

Inverse Iimit and FP-Injective Hulls of Modules

Wang Fanggui

(Nanjing University)

Abstract

Let R be a ring with unit element, and A a left R-module. A is called FP-injective if $\mathrm{Ext}_R^1(P, A) = 0$ for every finitely presented R-module P. Let $E_R(A)$ denote the injective hull of A. In the paper we prove by means of inverse limit functor that any module A Over coherent ring R has the minimum FP-injective submodule $e_R(A)$ in $E_R(A)$ which contains A and can be defined as the FP-injective hull of A.