第10卷 第4期
1990年11月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.10 No.4
Nov., 1990

离散系统中的Lyapunov函数与比较原理*

孙玉芝

（河北大学数学系，保定）

提要

1° 定义了向量函数上、下拟单调的概念，依此建立了向量拟差分不等式.

2° 利用向量Lyapunov函数法，给出了一般非线性离散系统平凡解稳定及不稳定的比较定理.

比较原理在高维系统解的稳定性的研究中起着重要作用．本文通过向量拟差分不等式，向量Lyapunov函数建立了一般非线性高维离散系统平凡解稳定的比较定理，推广了文[3]中利用纯量Lyapunov函数所得的结果.

在本文中，R^n表示n维欧氏空间，

$$R_+^n=\{x=(x_1,\cdots,x_n)^T\in R^n|x_i>0,\ i=1,2,\cdots,n\}\quad (x_1,\cdots,x_n)^T=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}.$$

$$I=\{t_0+k,\ t_0\in R_+,\ k=0,1,2,\cdots\}$$

$x>y$表示分量$x_i>y_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，$\|\cdot\|_M$表示R^n中的最大模范数：$x=(x_1,\cdots,x_n)^T\in R^n$

$$\|x\|_M=\max_{1\le i\le n}|x_i|$$

$\|\cdot\|$表示R^n中任一范数.

定义1 函数$a(r)$: $R_+\to R_+$是严格单增连续的．且$a(0)=0$，则称$a(r)$是k类函数．记

$$kF=\{k类函数\}$$

如果$a(r)\in kF$，并且$\lim\limits_{r\to+\infty}a(r)=+\infty$，则记$a(r)\in kR$，称$a(r)$具有无限大性质.

定义2 函数$V(x,\tau)$：$R^n\times I\to R$，$V(0,\tau)=0$，称为正定的，如果存在$a(r)\in kF$，使对$(x,\tau)\in R^n\times I$有

$$V(x,\tau)>a(\|x\|)\quad .$$

定义3 函数V: $R^n\times I\to R$称为k有界的，如果存在$\beta(r)\in kF$，使得对$(x,\tau)\in R^n\times I$，有

$$V(x,\tau)<\beta(\|x\|)$$

* 1989年3月20日收到.

这些定义可参见文[1].

关于离散系统的各种稳定性定义完全类同于文[2]，本文不再详述.

定义4 称$g(u,\tau)$：$R_+^q\times I\to R_+^q$ ($q\geqslant 1$)为关于u上拟单调增的，如果对于R_+^q中任意二元u、w，当$u\leqslant \max\limits_i w_i v$时($v=(v_1,\cdots,v_q)^T$, $v_i=1$, $i=1,2,\cdots,q$)，有

$$g(u,\tau)\leqslant \max_i g_i(w,\tau)v$$

定义4′ 称$g(u,\tau)$：$R_+^q\times I\to R_+^q$为关于u上拟单调增的，如果对于R_+^q中任意二元u、w，若有：$\|u\|_M\leqslant\|w\|_M$，则

$$\|g(u,\tau)\|_M\leqslant\|g(w,\tau)\|_M .$$

命题1 定义4与定义4′是等价的.

这里指出$q>1$时，单调增与上拟单调增是互不包含的，当$q=1$时单调增与上拟单调增等价.

例1 （单调增而不上拟单调增）

考虑二维情况：令

$$g(u,\tau):\ R_+^2\times I\to R_+^2$$

$$g(u,\tau)=\begin{bmatrix} g_1(u,\tau)\\ g_2(u,\tau)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_1+u_2\\ u_2\end{bmatrix}$$

这里$u=(u_1,u_2)^T$.

显然，它是单调增的. 但它不是上拟单调的：取$u=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，$w=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\2\end{bmatrix}$，有：$\|u\|_M\leqslant\|w\|_M$ 而

$$g(u,\tau)=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix},\quad g(w,\tau)=\begin{bmatrix}\frac{5}{2}\\2\end{bmatrix}$$

即知：

$$\|g(u,\tau)\|_M>\|g(w,\tau)\|_M$$

因而，它不是上拟单调增的.

例2 （上拟单调增而不单增）

考虑二维情况：

$$h(u,\tau):\ R_+^2\times I\to R_+^2$$

$$h(u,\tau)=\begin{bmatrix} h_1(u,\tau)\\ h_2(u,\tau)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} |u_1-u_2|\\ \frac{1}{2}(u_1+u_2)+\frac{1}{2}|u_1-u_2|\end{bmatrix}$$

易知：它是上拟单调增的. 可它不是单调增的. 取$u=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$，$w=\begin{bmatrix}2\\3\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，有$u<w$，而

$$h(u,\tau)=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},\quad h(w,\tau)=\begin{bmatrix}1\frac{1}{2}\\3\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

这时：$h(u,\tau)\leqslant h(w,\tau)$并不成立，因而它不是单调增的.

下面给出上拟单增的一些性质：

性质 1 若$g(u,\tau)$是上拟单增的，则$\|g(u,\tau)\|_M$是单增的．

性质 2 若$f(u,\tau)$，$g(u,\tau)$：$R_+^q\times I\to R_+^q$均关于u是上拟单增的，则：$g(f(u,\tau),\tau)$也是上拟单增的．

证明 对任意$u,w\in R_+^q$，设$\|u\|_M<\|w\|_M$，由于f是上拟单增的，故有：

$$\|f(u,\tau)\|_M<\|f(w,\tau)\|_M$$

又由于g是上拟单增的，因而有：

$$\|g(f(u,\tau),\tau)\|_M<\|g(f(w,\tau),\tau)\|_M$$

即知$g(f(u,\tau),\tau)$关于u是上拟单增的．

性质 3 若$g(u,\tau)$是上拟单增的，则对任意正常数$c>0$，$cg(u,\tau)$也是上拟单增的．

定义 5 称$g(u,\tau)$：$R_+^q\times I\to R_+^q$是关于u下拟单调增的，如果对于R_+^q中任意二元u、w，若有，$w\geqslant\max\limits_i u_i v$，则

$$g(w,\tau)>\max_i g_i(u,\tau)v$$

这里指出当$q>1$时单调增与下拟单增是互不包含的，当$q=1$时，单调增与下拟单增是等价的．

下拟单增具有下述性质：

性质 4 若$f(u,\tau)$，$g(u,\tau)$：$R_+^q\times I\to R_+^q$均关于u是下拟单增的，则：$g(f(u,\tau),\tau)$也是下拟单增的．

性质 5 若$g(u,\tau)$是下拟单增的，则对任意正常数$c>0$，$cg(u,\tau)$也是下拟单增的．

下面考虑系统：

$$x(\tau+1)=f(x(\tau),\tau) \tag{1}$$

$$u(\tau+1)=g(u(\tau),\tau) \tag{2}$$

其中：　f：$R^n\times I\to R^n$，　$f(0,\tau)=0\Leftrightarrow x(\tau)=0$

g：$R_+^q\times I\to R_+^q$，　$g(0,\tau)=0\Leftrightarrow u(\tau)=0$，　$q<n$．

（一）研究系统（1）平凡解的稳定性

引理 1 （拟差分不等式）

设$w(\tau)$：$I\to R_+^q$满足：$w(\tau+1)<g(w(\tau),\tau)$，$\tau\in I$　$u(\tau)$满足（2），并设$w(t_0)<\max\limits_i u_i(t_0)v$，其中$g(u,\tau)$关于$u$是上拟单增的，那么对所有的$\tau>t_0$均有

$$w(\tau)<\max_i u_i(\tau)v \tag{3}$$

证明 利用数学归纳法

当$\tau=t_0$时，由假设可知不等式（3）成立．

假设$\tau=t_0+k$时有（3）成立，即

$$w(t_0+k)<\max_i u_i(t_0+k)v$$

考虑$\tau=t_0+k+1$时，由g的上拟单增性知：

$$\begin{aligned}w(t_0+k+1)&<g(w(t_0+k),t_0+k)\\&<\max_i g_i(u(t_0+k),t_0+k)v=\max_i u_i(t_0+k+1)v\end{aligned}$$

因此，由数学归纳法知：对所有$\tau\geqslant t_0$，均有（3）成立.

引理 2 设 $w(\tau)$：$I\to R_+^q$满足 $w(\tau+1)<g(w(\tau),\tau)$ 并假设 $w(t_0)\leqslant\max\limits_i u_i(t_0)v$，对 g 的要求同引理 1，则对 $\tau>t_0$，有

$$w(\tau)<\max_i u_i(\tau)v$$

证明中归纳从 $\tau=t_0+1$ 开始，过程同引理 1.

注 上面两个引理中当 $q=1$时即为文[3]的引理 1 及引理 2.

定理 1 对系统（1）、（2），若满足条件

（i） 存在向量函数 $V(x,\tau)$：$R^n\times I\to R_+^q$ 关于 x 连续，$V(0,\tau)=0$，其沿系统（1）有 $V(x(\tau+1),\tau+1)\leqslant g(V(x(\tau),\tau),\tau)$，其中 $g(u,\tau)$ 关于 u 为上拟单增的.

（ii） 存在$a(r)\in kF$，使得 $a(\|x\|_M)\leqslant\|V(x,\tau)\|_M$.

则有：

1° 由系统（2）平凡解稳定可推出（1）平凡解稳定.

2° 由系统（2）平凡解渐近稳定可推出（1）平凡解渐近稳定.

证明1° 由于系统（2）平凡解是稳定的，所以$\forall\varepsilon>0$ 及 $t_0\in R_+$，$\exists\delta(\varepsilon,t_0)>0$，当 $\|u^0\|_M<\delta$时，有

$$\|u(\tau,u^0,t_0)\|_M<a(\varepsilon),\quad \tau\geqslant t_0 \tag{4}$$

因为$V(0,t_0)=0$ 且V连续，所以$\exists\delta_0>0$，使当 $\|x_0\|_M<\delta_0$时，

$$\|V(x_0,t_0)\|_M<\frac{\delta}{2}$$

取 $u^0=\dfrac{\delta}{2}v$，$\|u^0\|_M=\dfrac{\delta}{2}<\delta$

此时有：

$$V(x_0,t_0)<\max_i u_i(t_0)v\quad\text{成立}$$

再由假设（i）及引理 1 知：对所有 $\tau\geqslant t_0$

$$V(x,\tau)\leqslant\max_i u_i(\tau,u^0,t_0)v\ \text{成立}$$

再由假设条件（ii）及式（4）知

$$a(\|x(\tau,x_0,t_0)\|_M)\leqslant\|V(x(\tau,x_0,t_0),\tau)\|_M\leqslant\|u(\tau,u^0,t_0)\|_M<a(\varepsilon)$$

又因$a\in kF$，是严格单增的，故

$$\|x(\tau,x_0,t_0)\|_M<\varepsilon\qquad\tau\geqslant t_0$$

即证得系统（1）平凡解是稳定的.

证明2° 由于（2）平凡解是渐近稳定的，因而是稳定的，由 1°的证明知系统（1）的平凡解也是稳定的.

由于（2）平凡解是渐近稳定的，故对$\forall t_0\in R_+\ \exists\,\eta'(t_0)$ 使对 $\forall\varepsilon>0$ 及 $\|u^0\|_M<\eta'$，存在 $T(\varepsilon,u^0,t_0)>0$，当$\tau\geqslant t_0+T$时，有

$$\|u(\tau,u^0,t_0)\|_M<a(\varepsilon) \tag{5}$$

由于$V(0,t_0)=0$ 及V的连续性知：$\exists\,\eta(t_0)$，使当 $\|x_0\|_M<\eta(t_0)$ 时，有 $\|V(x_0,t_0)\|_M<\dfrac{\eta'}{2}$，取 $u^0=\dfrac{\eta'}{2}v$，此时有 $V(x_0,t_0)<\max\limits_i u_i^0v$.

由假设(i)及引理 1，就有

$$V(x(\tau),\tau)<\max_i u_i(\tau)v \qquad \tau>t_0$$

即：
$$\|V(x(\tau),\tau)\|_M<\|u(\tau)\|_M$$

对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\|x_0\|_M<\eta(t_0)$，存在 $T(\varepsilon,\frac{\eta'}{2}v,t_0)>0$，使当 $\tau>t_0+T$ 时，由假设(ii)及式(5)知
$$\|x(\tau,x_0,t_0)\|_M<\varepsilon \qquad \text{成立.}$$

从而(1)平凡解是渐近稳定的. ■

定理 2 对系统(1)、(2)，若满足条件:

(i) 存在函数 V: $R^n\times I\to R_+^q$，$V(0,\tau)=0$，使其沿(1)有 $V(x(\tau+1),\tau+1)<g(V(x(\tau),\tau),\tau)$ 其中 $g(u,\tau)$ 关于 u 是上拟单增的.

(ii) 存在 $a(r)$，$\beta(r)\in kF$，使得 $a(\|x\|_M)<\|V(x,\tau)\|_M<\beta(\|x\|_M)$.

则:

1° 由(2)的平凡解一致稳定可推出(1)平凡解一致稳定.

2° 由(2)平凡解一致渐近稳定可推出(1)平凡解一致渐近稳定.

证明 1° 由(2)平凡解一致稳定知 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，使对 $\forall t_0\in R_+$ 当 $\|u^0\|_M<\delta$ 时
$$\|u(\tau,u^0,t_0)\|_M<a(\varepsilon) \quad \text{对所有 } \tau>t_0 \text{ 成立.}$$

由条件(ii)，取 $\delta_0=\beta^{-1}(\frac{\delta}{2})$，当 $\|x_0\|_M<\delta_0$ 时，有 $\|V(x_0,t_0)\|_M<\beta(\|x_0\|_M)<\beta(\delta_0)=\frac{\delta}{2}$.
取 $u^0=\frac{\delta}{2}v$，此时 $V(x_0,t_0)<\max_i u_i^0 v$.

由条件(i)及引理 1 有，$V(x,\tau)<\max_i u_i(\tau)v$，$\tau>t_0$ 成立.

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_0(\varepsilon)>0$，使对 $\forall t_0\in R_+$，当 $\|x_0\|_M<\delta_0$ 时有
$$a(\|x(\tau,x_0,t_0)\|_M)<\|V(x,\tau)\|_M<\|u(\tau,u^0,t_0)\|_M<a(\varepsilon).$$

由于 $a(r)\in kF$，故：$\|x(\tau,x_0,t_0)\|_M<\varepsilon$ 对 $\tau\geqslant t_0$ 成立. 故(1)平凡解是一致稳定的.

2°的证明类同于定理 1 的证明. ■

(二) 研究系统(1)平凡解的不稳定性

引理 3 (反向拟差分不等式)

设 $w(\tau)$: $I\to R_+^q$ 满足：$w(\tau+1)>g(w(\tau),\tau)$，$u(\tau)$: $I\to R_+^q$ 满足 $u(\tau+1)=g(u(\tau),\tau)$，其中 $g(u,\tau)$ 关于 u 是下拟单增的，并假设 $w(t_0)>\max_i u_i(t_0)v$.

则对 $\tau>t_0$，均有:
$$w(\tau)>\max_i u_i(\tau)v \tag{6}$$

证明：当 $\tau=t_0$ 时，由假设知(6)成立.

假设当 $\tau=t_0+k$ 时，(6)成立，即有
$$w(t_0+k)>\max_i u_i(t_0+k)v$$

考虑 $\tau=t_0+k+1$ 时，由于 $g(u,\tau)$ 为下拟单增的，且:
$$w(\tau+1)>g(w(\tau),\tau)$$

所以:
$$w(t_0+k+1)>g(w(t_0+k),t_0+k)>\max_i g_i(u(t_0+k),t_0+k)v=\max_i u_i(t_0+k+1)v$$

故由数学归纳法知：$w(\tau)\geqslant\max_i u_i(\tau)v$ 对所有的 $\tau\geqslant t_0$ 均成立.

定理3 如果对系统(1)、(2)满足

(i) 存在函数 $V(x,\tau)$: $R^n\times I\to R_+^q$, V 关于 x 连续. 使其沿系统(1)有 $V(x(\tau+1),\tau+1)\geqslant g(V(x(\tau),\tau),\tau)$, $g(u,\tau)$是关于 u 下拟单增的, $V(0,\tau)\equiv 0$.

(ii) 存在 $a(r)$、$\beta(r)\in kF$, 使得 $a(\|x\|_M)<\|V(x,\tau)\|_M<\beta(\|x\|_M)$.

则有:

1° 由系统(2)平凡解不稳定可推得系统(1)平凡解不稳定.

2° 由系统(2)平凡解不渐近稳定可推得系统(1)平凡解不渐近稳定.

证明1° 由于系统(2)平凡解不稳定, 故 $\exists\varepsilon_0>0$ 及 $t_0\in R_+$, 使对 $\forall\delta>0$, 都存在 u^0 及相应的 $T>t_0$, 当 $\|u^0\|_M<a(\frac{\delta}{2})$ 时, $\max_i u_i(T,u^0,t_0)\geqslant\varepsilon_0$.

由条件(ii), 对上述 δ, 当 $\|x\|_M>\frac{\delta}{2}$ 时, 有

$$\|V(x,t_0)\|_M\geqslant a(\|x\|_M)>a(\frac{\delta}{2}).$$

从而使 $V(x,t_0)=a(\frac{\delta}{2})v$ 的 x 满足: $\|x\|_M\leqslant\frac{\delta}{2}$. 由于 V 关于 x 连续, 故存在 x_0, $\|x_0\|_M\leqslant\frac{\delta}{2}<\delta$, 使 $V(x_0,t_0)=a(\frac{\delta}{2})v$, 此时, 有: $V(x_0,t_0)>\max_i u_i^0 v$ 由引理3知 $V(x(\tau,x_0,t_0),\tau)\geqslant\max_i u_i(\tau,u^0,t_0)v$ 对所有的 $\tau\geqslant t_0$ 成立, 自然对 $\tau=T$ 时上式成立.

再由条件(ii),

$$\beta(\|x(T,x_0,t_0)\|_M)\geqslant\|V(x(T,x_0,t_0),T)\|_M\geqslant\max_i u_i(T,u^0,t_0)\geqslant\varepsilon_0.$$

由 β 的单调性, 有: $\|x(T,x_0,t_0)\|_M\geqslant\tilde{\varepsilon}=\beta^{-1}(\varepsilon_0)$ 从而证得: $\exists\tilde{\varepsilon}=\beta^{-1}(\varepsilon_0)$ 及 t_0, 使对 $\forall\delta>0$, 存在 x_0 及相应的 T, 当 $\|x_0\|_M<\delta$ 时, 有

$$\|x(T,x_0,t_0)\|_M\geqslant\tilde{\varepsilon}\ \text{成立}.$$

即系统(1)的平凡解不稳定.

证明2° 由于渐近稳定等价于稳定且吸引, 则系统(2)平凡解不渐近稳定等价于不稳定或不吸引.

假设系统(2)平凡解是不稳定的:

由1°的证明知: 系统(1)平凡解是不稳定的, 故: 系统(1)平凡解不是渐近稳定的.

假设系统(2)平凡解是不吸引的:

$\forall\eta>0$, 存在 u^0, 使当 $\|u^0\|_M<a(\frac{\eta}{2})$ 时, $\exists\varepsilon_0>0$, $t_0\in R_+$, 对 $\forall T$, 都存在 $\tilde{\tau}\geqslant t_0+T$, 使得

$$\max_i u_i(\tilde{\tau},u^0,t_0)\geqslant\varepsilon_0$$

由条件(ii), 对上述 η, 当 $\|x\|_M>\frac{\eta}{2}$ 时, 有

$$\|V(x,t_0)\|_M\geqslant a(\|x\|_M)>a(\frac{\eta}{2})$$

从而存在 x_0, $\|x_0\|_M\leqslant\frac{\eta}{2}<\eta$, 使

$$V(x_0,t_0)=a(\frac{\eta}{2})v\quad\text{成立}.$$

从而有：

$$V(x_0,t_0)>\max_i u_i^0 v\ .$$

由引理 3 及条件（i）有：

$$V(x(\tau,x_0,t_0),\tau)>\max_i u_i(\tau,u^0,t_0)v$$

对所有 $\tau>t_0$成立．自然，对 $\forall T$，当 $\tau=\tilde{\tau}>t_0+T$时，以上不等式同样成立．再由条件（ii）

$$\beta(\|x(\tilde{\tau},x_0,t_0)\|_M)>\|V(x(\tilde{\tau},x_0,t_0),\tilde{\tau})\|_M$$
$$>\max_i u_i(\tilde{\tau},u^0,t_0)>\varepsilon_0\ .$$

由 β的单调性，就有：

$$\|x(\tilde{\tau},x_0,t_0)\|_M>\varepsilon^*=\beta^{-1}(\varepsilon_0)$$

这样即证得：$\forall\eta>0$，存在x_0，当 $\|x_0\|_M<\eta$时，存在 $\varepsilon^*=\beta^{-1}(\varepsilon_0)$ 及 $t_0\in R_+$，对 $\forall T$，存在$\tilde{\tau}>t_0+T$，使得：

$$\|x(\tilde{\tau},x_0,t_0)\|_M>\varepsilon^*$$

所以，系统（1）平凡解不吸引，从而也就不是渐近稳定的． ■

在本文写作过程中，曾得到中科院数学所王联研究员的指导，在此表示感谢。

参 考 文 献

［1］王联，王慕秋：非线性常微分方程定性分析，哈尔滨工业大学出版社，1987．

［2］王慕秋，王联，离散动力系统的稳定性，数学季刊，Vol.2，No.3，pp12—30，1987．

［3］J.A. Heinen, Difference inequalities and comparison theorems for stability of discrete systems. INT. J. SYSTEMS SCI. Vol. 10, No.6, pp711—718, 1979.

［4］J.P. Lasalle, Stability of dynamical systems. Brown University, 1976.

Lyapunov Function and Comparison Principle for Discrete Systems

Sun Yuzhi

(HeBei University Mathematics Department)

Abstract

In this paper, we defined the concepts of upper-qusi-monotone and sub-qusi-monotone for vector functions. Then, vector qusi-difference inqualities are founded. Furthermore, using vector Lyapunov function methods, comparison theorems for stability and unstability of the trivial solution of non-linear discrete systems are given.