第10卷 第4期
1990年11月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.10 No.4
Nov., 1990

关于非线性泛函的一个问题*

孙经先

（山东大学数学系，济南）

本文是作者工作［1］的继续．

众所周知，变分学中的一个基本结论是

定理A 设D是Banach空间E中有内点的子集，$f: D\to R^1$是一个泛函．设f在D的某一内点x_0处达到极小值，并且f在x_0处有有界线性的G微分，则必有$f'(x_0)=\theta$，即$f(x_0)$是f的临界值．

定理A中的基本条件是要求D有内点，并且$f(x)$在D的某一内点处达到极小值．显然如果这一条件不满足，我们就不能断定f在D中的极小值是临界值．这样就提出一个问题：当D没有内点，$f(x)$在某一$x_0\in D$处达到相对于D的极小值（或者虽然D有内点，但$f(x)$在D的边界点x_0处达到相对于D的极小值）时，需要附加什么条件，才能保证该极小值是临界值?

当D是Hilbert空间中的凸闭集时，我们解决了上述问题，给出了f在D上的极小值是临界值的充分必要条件．作为应用，我们证明了梯度算子的某些不动点定理．最后我们讨论了在f达不到最小值时$\inf\limits_{x\in D}f(x)$与$f(x)$的渐近临界值之间的关系．

设H是Hilbert空间，$f: H\to R^1$是一个泛函．把$f(x)$表示为

$$f(x)=\frac{1}{2}\|x\|^2-g(x) \tag{1}$$

的形式（实际应用中的许多泛函自然地具有这种形式）．设D是H中的一个凸闭集．在本文中我们不假定D有界，也不要求D有内点．

对$x\in D$，令

$$I_D(x)=\{(1-\lambda)x+\lambda y \mid y\in D,\ \lambda>0\},$$

则$I_D(x)$称为是x相对于D的内向集（见［4］［5］）．

定理1 设$f(x)$在$x_0\in D$处达到$f(x)$在D上的极小值（即存在x_0在D中的一个邻域U，使对任给$x\in U$，都有$f(x_0)<f(x)$），并且$f(x)$在x_0处有有界线性的Gâteaux微分．则$f(x_0)$是$f(x)$的临界值的充分必要条件是

$$g'(x_0)\in I_D(x_0), \tag{2}$$

其中$g(x)$由（1）式确定．

* 1989年2月27日收到．

证明　设 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的临界值，则 $f'(x_0)=\theta$．由（1）式知 $g'(x_0)=x_0\in I_D(x_0)$．必要性获证．下证充分性．用反证法，设 $f(x)$ 在 $x_0\in D$ 处达到 $f(x)$ 在 D 上的极小值，但 $f'(x_0)\neq\theta$．由（2）式及 $I_D(x)$ 的定义知存在 $y^*\in D$ 及 $\lambda^*>0$，使

$$g'(x_0)=(1-\lambda^*)x_0+\lambda^* y^*. \tag{3}$$

显然 $\lambda^*\neq 0$（若 $\lambda^*=0$，则 $g'(x_0)=x_0$，即 $f'(x_0)=\theta$，此与 $f'(x_0)\neq\theta$ 矛盾），故 $\lambda^*>0$．由(3)式知

$$y^*-x_0=\frac{1}{\lambda^*}[g'(x_0)-x_0]. \tag{4}$$

由 D 是凸闭集及 $x_0\in D$，$y^*\in D$ 知当 $0<t<1$ 时有

$$x_0+t(y^*-x_0)\in D,$$

故由（4）式知当 $0<t<1$ 时有

$$x_0+\frac{t}{\lambda^*}[g'(x_0)-x_0]\in D. \tag{5}$$

令 $h=\frac{1}{\lambda^*}[g'(x_0)-x_0]$．由于 $f(x)$ 在 x_0 处有有界线性 Gâteaux 微分，故

$$f(x_0+th)-f(x_0)=(f'(x_0),th)+\omega(t), \tag{6}$$

其中 $\omega(t)$ 满足 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\omega(t)}{t}=0$．由（5）式知，可取 $0<\delta<1$，使当 $0<t<\delta$ 时有 $x_0+th\in U$（U 的意义见定理 1 的叙述），并且

$$\left|\frac{\omega(t)}{t}\right|<\frac{1}{2\lambda^*}\|f'(x_0)\|^2. \tag{7}$$

注意到 $f'(x_0)=x_0-g'(x_0)$，故由(6)、(7)式知当 $0<t<\delta$ 时有

$$\begin{aligned}f(x_0+th)-f(x_0)&=-\frac{t}{\lambda^*}\|x_0-g'(x_0)\|^2+\omega(t)\\&<-\frac{t}{\lambda^*}\|f'(x_0)\|^2+\frac{t}{2\lambda^*}\|f'(x_0)\|^2=-\frac{t}{2\lambda^*}\|f'(x_0)\|^2<0.\end{aligned} \tag{8}$$

故 $f(x+th)<f(x_0)$（当 $0<t<\delta$ 时）．但另一方面，$x_0+th\in U$（当 $0<t<\delta$ 时），故 $f(x_0+th)\geq f(x_0)$．产生矛盾．充分性获证．■

注 1　定理 1 给出了 $f(x)$ 在 D（D 不要求有内点）上的极小值是临界值的充要条件，回答了本文开头提出的问题．

下面我们总假定 $f(x)$ 在 D 上处处有有界线性 Gâteaux 微分，并令

$$Ax=g'(x). \tag{9}$$

其中 $g(x)$ 由（1）式确定，如果对任给 $x\in D$，都有

$$Ax\in I_D(x), \tag{10}$$

则称 A 是 D 上的内向映射（见[4]、[5]）．

推论 1　设 D 是 H 中的有界凸闭集，$f(x)$ 是 D 上的弱下半连续泛函．又设由（9）式定义的算子 A 是 D 上的内向映射，则必存在 $x_0\in D$，使得 $f(x_0)=\inf\limits_{x\in D}f(x)$，并且 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的临界值

证明　由[2]第五章定理1.6知存在 $x_0\in D$，使 $f(x_0)=\inf\limits_{x\in D}f(x)$．因为 A 是 D 上的内向映射，所以

$$g'(x_0)=Ax_0\in I_D(x_0).$$

根据定理 1，$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的临界值． ■

定理 2 设 D 是 H 中的有界凸闭集，$A:D\to H$ 是梯度算子，并且满足

（i） $A(D)$ 是 H 中的相对紧集，

（ii） A 是 D 上的内向映射．

则 A 在 D 中必有不动点．

证明 因为 A 是梯度算子，故存在泛函 $g(x)$，使 $g'(x)=Ax$．因为 $A(D)$ 是 H 中的紧集，故由［2］第五章定理1.2之证明可知 $g(x)$ 是弱连续泛函，从而 $f(x)=\frac{1}{2}\|x\|^2-g(x)$ 是 D 上的弱下半连续泛函．根据推论1，存在 $x_0\in D$，使 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的临界值，即 x_0 是 $f(x)$ 的临界点．于是 $f'(x_0)=\theta$．因为 $f'(x)=x-Ax$，故 x_0 必为 A 的不动点． ■

推论 2 设 D 是 H 中的有界凸闭集，$A: D\to D$ 是梯度算子，并且 $A(D)$ 是 H 中的相对紧集．则 A 在 D 中必有不动点．

证明 由 $A: D\to D$，即可知 A 是 D 上的内向映射．故推论 2 是定理 2 的特例．

注 2 在推论 2 中我们没有假定 A 是连续的，故推论 2 不能从Schauder不动点定理推出．但推论 2 可以看作是著名Schauder不动点定理的一个补充．

注 3 由推论 2 的证明可以看出，当 A 是梯度算子时，Schauder不动点定理的变分意义在于：A 必有一个不动点，使在该不动点处，泛函 $f(x)$ ($f(x)$ 与 A 的关系是 $f'=I-A$)，达到在 D 上的最小值．

下面讨论 $f(x)$ 达不到在 D 上的最小值时，$\inf\limits_{x\in D} f(x)$ 与 $f(x)$ 的渐近临界值（见［1］）之间的关系．

定理 3 设 D 是Hilbert空间 H 中的凸闭集，$f(x)$ 在 D 上有下界，即

$$c=\inf_{x\in D} f(x)>-\infty .$$

又设由（9）式定义的算子 A 是 D 上的内向映射．则 c 是 $f(x)$ 的渐近临界值，即存在 $\{x_n\}\subset D$，使

$$f'(x_n)\to\theta,\ f(x_n)\to c\ . \tag{11}$$

证明 对每一个自然数 n，根据著名的Ekeland变分原理（见［6］），存在 $x_n\in D$，使得

$$c<f(x_n)<c+\frac{1}{n}\ , \tag{12}$$

$$f(x)-f(x_n)>-\frac{1}{n}\|x-x_n\|,\ \forall x\in D. \tag{13}$$

不失一般设 $f'(x_n)\neq\theta$．因为 A 是内向映射，故仿（5）式之证明知必存在 $\lambda_n^*>0$，使当 $0<t<1$ 时有

$$x_n+\frac{t}{\lambda_n^*}(Ax_n-x_n)\in D \tag{14}$$

令 $h_n=\frac{1}{\lambda_n^*}(Ax_n-x_n)$，则有

$$f(x_n+th_n)-f(x_n)=(f'(x_n),th)+\omega_n(t)$$

其中 $\omega_n(t)$ 满足 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\omega_n(t)}{t}=0$．因此仿（8）式之证明，可取 $0<\delta_n<1$，使当 $0<t<\delta_n$ 时有

$$f(x_n+th_n)-f(x_n)\leqslant-\frac{t}{2\lambda_n^*}\|f'(x_n)\|^2. \tag{15}$$

在(13)中令 $x=x_n+th_n$，由(14)式知当 $0<t<\delta_n$ 时有 $x_n+th_n\in D$，故由(13)式知当 $0<t<\delta_n$ 时

$$f(x_n+th_n)-f(x_n)\geqslant-\frac{t}{n}\|h_n\|=-\frac{t}{n\lambda_n^*}\|f'(x_n)\|. \tag{16}$$

由（15)、(16）式知

$$\frac{t}{2\lambda_n^*}\|f'(x_n)\|^2<\frac{t}{n\lambda_n^*}\|f'(x_n)\|,$$

从而

$$\|f'(x_n)\|<\frac{2}{n}. \tag{17}$$

由(12)、(17)式知(11)式成立. ■

推论 3 在定理 3 的条件下，若进一步假定 $f(x)$ 在 D 上满足 P.S. 条件(即若 $\{x_n\}\subset D$，$\{f(x_n)\}$ 有界，$f'(x_n)\to\theta$ 蕴含着 $\{x_n\}$ 有收敛子列)，则 $c=\inf_{x\in D}f(x)$ 是 $f(x)$ 的临界值.

推论 4 设 D 是 Hilbert 空间中的有界凸闭集，$A: D\to H$ 是有界的梯度算子，并且是 D 上的内向映射. 则任给 $\varepsilon>0$. 存在 $x_\varepsilon\in D$，使 $\|x_\varepsilon-Ax_\varepsilon\|<\varepsilon$.

证明 因为 $A: D\to H$ 是梯度算子，故存在泛函 $g(x)$，使 $g'(x)=Ax$. 令 $f(x)=\frac{1}{2}\|x\|^2-g(x)$. 因为 A 是有界的，故易知 $f(x)$ 是 D 上的(下方) 有界泛函. 根据定理 3 即知推论 4 成立. ■

注 4 若 A 满足 $A(D)\subset D$，则 A 必是 D 上的内向映射，故定理 3、推论 3 和定理 4 是作者[1]中的三个主要结论([1]定理 1、定理 2 和定理 3)的推广. [1]要求 A 是连续的，并且满足 Schauder 型条件，本文不要求 A 连续，并且仅要求 A 是内向映射. 同时本文的证明方法与[1]完全不同([1]的方法似乎难以证明本文的结论).

参 考 文 献

[1] 孙经先，临界点理论中的Schauder型条件，科学通报，31(1986)，328—331.

[2] 郭大钧，非线性泛函分析，山东科学技术出版社.

[3] Guo Dajun, Sun Jingxian and Qi Guijie(郭大钧，孙经先，戚桂杰)，Some extensions of the Mountain Pass Lemma, Diff. Int. Equ., 1(1988), 351—358.

[4] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer-Verlag, 1985.

[5] Halpern, B. R., Bergman, G. M., A fixed point theorem for inward and outward maps, Trans. AMS., 130 (1968), 353—358.

[6] Nirenberg, L., Variational and topological methods in nonlinear problems, Bull. Amer. Math. Soc., (New Series) 4 (1981). 267—302.

A Question about Nonlinear Functional

Sun Jingxi an

(Shandong University)

Abstract

Suppose that H is a Hilbert space, D is a convex closed set in H, $f: H \to R^1$ is a functioal, $f(x)=\frac{1}{2}\|x\|^2-g(x)$. Suppose that the minimum of $f(x)$ with respect to D is attained at $x_0 \in D$ and $f(x)$ has a bounded linear Gateaux differential at x_0. In this paper we prove that $f(x_0)$ is a critical value of $f(x)$ when and only when $g'(x_0) \in I_D(x_0)=\{(1-\lambda)x_0+\lambda y \mid y \in D,\ \lambda>0\}$.

接564页

定理 1 设（2）—（7）成立，如果 fg 是强次线性的，即

$$\int_{+0}\frac{du}{f(u)g(u)}<\infty,\quad \int_{-0}\frac{du}{f(u)g(u)}<\infty; \tag{8}$$

并且

$$\int^{\infty} q(s)f(A(s,T))g(A(s,T))ds=\infty. \tag{9}$$

则方程（1）的所有解是振动的.

定理 2 设（2）-（7），（9）成立，并且

$$\frac{f(u)g(u)}{u^{a}}\geqslant r_1>0,\ u\neq 0. \tag{10}$$

其中 $0<a<1$. 则方程（1）的所有解是振动的.

定理 3 设（2）—（7）成立，并且

$$\frac{f(u)g(u)}{u}\geqslant r_2>0,\ u\neq 0; \tag{11}$$

$$\limsup_{t\to\infty}\int_T^t q(s)f(A(s,T))g(A'(s,T))ds>\frac{1}{r_2^2K_1^2K_2^2M}, \tag{12}$$

其中 $t\geqslant T\geqslant t_0$，$M$ 如引理中所述. 则方程（1）的所有解是振动的.

参考文献

〔1〕Grace, S. R. and Laill, B. S., J. Math. Anal. Appl., 123(1987), 584-588.

〔2〕Lalli, B. S. and Grace, S. R., J. Math. Anal. Appl., 119(1986), 164-170.

〔3〕Ladas, G., Lakshmikantham, V., and Papadekis, J. S., Delay and Funetional Differential Equations and Their Applications, Academic Press, New York/London, 1972, 219-231.