第10卷 第4期 1990年11月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.10 No.4 Nov., 1990

二阶强次线性常微分方程的振动性定理*

张 全 信

（山东 滨州师范专科学校）

本文讨论二阶微分方程

$$(a(t)\psi(x)x')'+q(t)f(x)g(x')=0 \tag{1}$$

的解的振动性质．在方程（1）中，$a\in C'([t_0,\infty)\to(0,\infty))$，$\psi\in C'(R\to[0,\infty))$，$q\in C([t_0,\infty)\to[0,\infty))$ 且在任意的区间 $[t^*,\infty)$ $(t^*\geqslant t_0)$ 上不恒等于0，$f\in C'(R\to R)$，$g\in C(R\to R)$．我们仅考虑方程（1）的可以延拓于 $[t_0,\infty)$ 上的解．在任何无限区间 $[T,\infty)$ 上 $x(t)$ 不恒等于零，这样的解叫正则解．一个正则解，若它有任意大的零点，则叫振动的；否则就叫非振动的．

在下面的定理中，以下条件将要用到．

$$\int_{t_0}^{\infty}\frac{1}{a(s)}\,ds=\infty; \tag{2}$$

$$xf(x)>0,\quad f'(x)\geqslant0,\quad x\neq0; \tag{3}$$

$$-f(-xy)\geqslant f(xy)\geqslant K_1f(x)f(y), \tag{4}$$

其中 $x,y>0$，K_1 是正常数；

$$g(x)>0\ (x\neq0),\quad g'(x)\geqslant0\ (x>0); \tag{5}$$

$$g(-xy)\geqslant g(xy)\geqslant K_2g(x)g(y), \tag{6}$$

其中 $x,y>0$，K_2 是正常数；对于某个正常数 c，

$$0<\psi(x)\leqslant c,\ x\neq0. \tag{7}$$

引理 设（2），（7）成立，$x(t)>0$ 是 $[t_0,\infty)$ 上的连续可微函数．记 $W(t)=a(t)\psi(x(t))x'(t)$，又 $W'(t)\leqslant0$ 且对于足够大的 t，$W'(t)\neq0$，则

（i）存在 $T_0\geqslant t_0$，使当 $t\geqslant T_0$ 时，有 $W(t)>0$，即 $x'(t)>0$；

（ii）若 $\lim\limits_{t\to\infty}W(t)\neq0$，则存在 $T\geqslant T_0$ 和正常数 M，使当 $t\geqslant T$ 时，有

$$x(t)\geqslant MA(t,T)W(t),$$
$$x'(t)\geqslant MA'(t,T)W(t),$$

其中 $A(t,T)=\int_T^t\frac{1}{a(s)}ds$．

本文得到的主要结果是 （转563页）

1988年11月16日收到

A Question about Nonlinear Functional

Sun Jingxi an

(Shandong University)

Abstract

Suppose that H is a Hilbert space, D is a convex closed set in H, $f: H \to R^1$ is a functioal, $f(x)=\frac{1}{2}\|x\|^2-g(x)$. Suppose that the minimum of $f(x)$ with respect to D is attained at $x_0 \in D$ and $f(x)$ has a bounded linear Gateaux differential at x_0. In this paper we prove that $f(x_0)$ is a critical value of $f(x)$ when and only when $g'(x_0) \in I_D(x_0)=\{(1-\lambda)x_0+\lambda y \mid y \in D,\ \lambda>0\}$.

接564页

定理1 设（2）—（7）成立，如果 fg 是强次线性的，即

$$\int_{+0}\frac{\mathrm{d}u}{f(u)g(u)}<\infty,\quad \int_{-0}\frac{\mathrm{d}u}{f(u)g(u)}<\infty; \tag{8}$$

并且

$$\int^{\infty} q(s)f(A(s,T))g(A(s,T))\mathrm{d}s=\infty. \tag{9}$$

则方程（1）的所有解是振动的.

定理2 设（2）-（7），（9）成立，并且

$$\frac{f(u)g(u)}{u^{a}}\geqslant r_1>0,\ u\neq 0. \tag{10}$$

其中 $0<a<1$. 则方程（1）的所有解是振动的.

定理3 设（2）—（7）成立，并且

$$\frac{f(u)g(u)}{u}\geqslant r_2>0,\ u\neq 0; \tag{11}$$

$$\limsup_{t\to\infty}\int_T^t q(s)f(A(s,T))g(A'(s,T))\mathrm{d}s>\frac{1}{r_2^2K_1^2K_2^2M}, \tag{12}$$

其中 $t\geqslant T\geqslant t_0$，$M$ 如引理中所述. 则方程（1）的所有解是振动的.

参考文献

〔1〕Grace, S. R. and Laill, B. S., J. Math. Anal. Appl., 123(1987), 584-588.

〔2〕Lalli, B. S. and Grace, S. R., J. Math. Anal. Appl., 119(1986), 164-170.

〔3〕Ladas, G., Lakshmikantham, V., and Papadekis, J. S., Delay and Funetional Differential Equations and Their Applications, Academic Press, New York/London, 1972, 219-231.