第10卷 第4期
1990年11月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.10 No.4
Nov., 1990

定义在范畴 ${}_RM_n^l$ 上的张量函数

刘 于 人

（苏州大学数学系）

文[1]引进了左 R-n模范畴 ${}_R\mathrm{M}_n^l$，将Hom函子推扩到 ${}_R\mathrm{M}_n^l$上，且讨论了它的拟正合性．在模范畴中，张量函子与Hom函子一样是一个重要的函子．文[2]企图在 ${}_R\mathrm{M}_n^l$上建立相应的张量积，并证明张量函子$\mathrm{M}\otimes_n$—：$AG_{rn}\to{}_RM_R^l$与Hom函子Hom（M—）：$AG'_{rn}\to{}_RM_n^l$为伴随对．但其构造的交换自由n-群仅对满足（E）条件的交换n-群具有泛性，故其张量积亦只是对满足（E）条件的左 R-n 模具有泛性，因而AG'_{rn}必须是满足（E）条件的范畴．另外，既然$M\otimes_{n}$—：${}_RM_n^l\to AG'_{rn}$为函子，那么$M\otimes_nM_0$应属于obAG'_{rn}，即$\widetilde{M\otimes_nM_0}$为独点集，然而这一点文[2]中并未给予证明．

本文设R为含单位元的交换环，在 ${}_RM_n^l$上建立了张量积，并讨论了张量函子$M\otimes_n$—：${}_RM_n^l\to{}_RM_n^{l'}$与Hom函子Hom(M，__)：${}_RM_n^{l'}\to{}_RM_n^l$的伴随关系，以及张量函子的拟正合性（其中 ${}_RM_n^{l'}$表示$\widetilde{M}$为独点集的左 R-n模范畴)．

文中沿用[1]的记号．

1． 范畴 ${}_RM_n^{l'}$

设（M，+，·）为左 R-n模，$\widetilde{M}=\{m_0\}$，即$M\in\mathrm{ob}\,{}_RM_n^{l'}$．对任意的$m_1,m_2\in M$，$r\in R$，定义：

$$m_1\oplus m_2=m_1+m_2+\underbrace{m_0+\cdots+m_0}_{n-2}\qquad r\circ m_1=r\cdot m_1$$

则（M，$\oplus$，$\circ$）为左 R-模．其中零元为m_0，m_i的负元为$-m_i$．

反之，设（M，$\oplus$，$\circ$）为左R-模．对任意的$m_1,m_2\cdots,m_n\in M$，$r\in R$，定义：

$$m_1\mp m_2\mp\cdots\mp m_n=m_1\oplus m_2\oplus\cdots\oplus m_n\qquad r\bar{\cdot}\, m_1=r\circ m_1$$

则（M，$\mp$，$\bar{\cdot}$）为左 R-n模．其中$\overline{m_i}=(n-2)(-m_i)$．显然$M\in\mathrm{ob}\,{}_RM_n^{l'}$．

又 $$m_1\mp m_2\mp\cdots\mp m_n=m_1\oplus m_2\oplus\cdots\oplus m_n=m_1+m_2+\cdots+m_n+\underbrace{m_0+\cdots+m_0}_{(n-1)(n-2)}=$$

$$=m_1+m_2+\cdots+m_n\ ,\qquad r\bar{\cdot}\, m_1=r\circ m_1=r\cdot m_1$$

故左 R-n模（M，$\mp$，$\bar{\cdot}$）即（M，+，·），且（N，+，·）是（M，+，·）的R-n子模当且仅当（N，$\oplus$，$\circ$）是（M，$\oplus$，$\circ$）的R-子模．

易知，范畴 ${}_RM_n^{l'}$与左 R-模范畴 ${}_R\mathrm{M}$是等价的．

* 1988年9月12日收到．

定义 1 若 $R-n$ 模 $M=\{rx|r\in R\}$，其中 $x\in M$，则 M 称作 $R-n$ 循环模，记作 Rx．R 的左理想子环 $\mathrm{ann}\,x=\{r\in R|rx=0x\}$ 称作 x 的零化子．

定义 2 设 $M\in \mathrm{ob}_R M_n^{l'}$，$\widetilde{M}=\{m_0\}$，$M_1, M_2,\cdots,M_s$ 是 $R-n$ 模 M 的子模，且满足：

（1）任意 $m\in M$，$m=m_1+m_2+\cdots+m_s+\underbrace{m_0+\cdots+m_0}_{(s-1)(n-2)}$ 其中 $m_i\in M_i$

（2）若 $m_1+m_2+\cdots+m_s+\underbrace{m_0+\cdots+m_0}_{(s-1)(n-2)}=m_0$，其中 $m_i\in M_i$ 则 $m_i=m_0$，$i=1,2,\cdots,s$．

那么称 M 是其子模 $M_1, M_2,\cdots,M_s$ 的直和，记作 $M=M_1\oplus M_2\oplus\cdots\oplus M_s$．

定理 设 R 为主理想环，$M\in \mathrm{ob}_R M_n^{l'}$，且 M 是有限生成 $R-n$ 模，那么，M 是循环模的直和，即 $M=Rz_1\oplus Rz_2\oplus\cdots\oplus Rz_s$，且 z_i 的零化子满足 $\mathrm{ann}\,z_1\supseteq\mathrm{ann}\,z_2\supseteq\cdots\supseteq\mathrm{ann}\,z_s$，$\mathrm{ann}\,z_i\neq R$．又若 $M=Rw_1\oplus Rw_2\oplus\cdots\oplus Rw_t$，且 $\mathrm{ann}\,w_1\supseteq\mathrm{ann}\,w_2\supseteq\cdots\supseteq\mathrm{ann}\,w_t$，$\mathrm{ann}\,w_i\neq R$，则 $s=t$，且 $\mathrm{ann}\,z_i=\mathrm{ann}\,w_i$，$i=1,2,\cdots,s$．

下面在范畴 ${}_R M_n^{l'}$ 中给出自由 $R-n$ 模．

令 $\sum_{i\in I}\oplus R_{e_i}=\{\sum_{i\in I}r_ie_i|r_i\in R$，且仅有限个 $r_i\neq 0\}$，$\sum_{i\in I}r_ie_i=\sum_{i\in I}r_i'e_i$ 当且仅当 $r_i=r_i'$，$i\in I$．

任意 $\sum_{i\in I}r_i^{(k)}e_i\in\sum_{i\in I}\oplus R_{l_i}$，$r\in R$，定义：

$$\sum r_i^{(1)}e_i+\sum r_i^{(2)}e_i+\cdots+\sum r_i^{(n)}e_i=\sum(r_i^{(1)}+r_i^{(2)}+\cdots+r_i^{(n)})e_i$$

$$r\cdot\sum r_i^{(1)}e_i=\sum rr_i^{(1)}e_i$$

则 $\sum_{i\in I}\oplus R_{e_i}$ 为左 $R-n$ 模，且 $\widetilde{\sum_{i\in I}\oplus R_{e_i}}=\{0\cdot\sum_{i\in I}r_ie_i|r_i\in R\}$ $\{\sum_{i\in I}0e_i\}$ 为独立点，即 $\sum_{i\in I}\oplus R_{e_i}\in \mathrm{ob}_R M_n^{l'}$．

命题 设 X 为任一集合，则存在 $FX\in\mathrm{ob}_R M_n^{l'}$ 及函数 $p: X\to FX$ 具下列泛性质：对任一 $M\in\mathrm{ob}_R M_n^{l'}$ 及任一函数 $g: X\to M$ 存在唯一的 $R-n$ 模同态 $h: FX\to M$ 使下图交换：即：$g=hp$．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"'] & FX \arrow[dl, "h"] \\ M & \end{tikzcd}$$

证明 令 $FX=\sum_{s\in X}\oplus R_{e_s}$，$p: s\mapsto\sum_{t\in X}r_te_t$，其中 $r_t=\begin{cases}1, & t=s\\ 0, & t\neq s.\end{cases}$ 则对任一左 $R-n$ 模 $M\in\mathrm{ob}_R M_n^{l'}$ 及任一函数 $g: X\to M$，存在唯一的 $R-n$ 模同态 $h: FX\to M: \sum_{s\in X}r_se_s\mapsto m_0+\sum_{s\in X}(r_sg(s)+\underbrace{m_0+\cdots+m_0}_{n-2})$（其中 $m_0\in\widetilde{M}$）使 $g=hp$．

FX 称作以 X 为基的自由 $R-n$ 模．

2．张量函子

首先给出 $R-n$ 模的商模的定义．

设 $M\in\mathrm{ob}_R M_n^{l'}$，$K$ 是 M 的 $R-n$ 子模，在 M 上建立等价关系 $\mathbf{R}: m_1\mathbf{R}m_2$ 当且仅当 $m_1=m_2+k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}$，$k_i\in K$．记 M/K 为 $\mathbf{R}$ 确定的等价类的集合，任意 $m\in M$，m 所在等价类记作 $[m]$．在 $M/K=\{[m]|m\in M\}$ 上定义：

$$[m_1]+[m_2]+\cdots+[m_n]=[m_1+m_2+\cdots+m_n]\quad r\cdot[m]=[rm]$$

则 M/K 为左 R-n 模．M/K 称作 M 的 R-n 商模．

若 $K\supseteq\widetilde{M}$，则 $M/K\in \mathrm{ob}_R M_n^{l'}$．这是因为 $\widetilde{M/K}=\{0[m]\mid[m]\in M/K\}$，任意 $[m_1]$，$[m_2]\in M/K$，$\underbrace{0m_1+0m_1+\cdots+0m_1}_{n-1}+0m_2=0m_2$，且 $0m_1,0m_2\in\widetilde{M}\subseteq K$，故 $[0m_1]=[0m_2]$，即 $0[m_1]=0[m_2]$．

又函数 n: $M\to M/K$: $m\mapsto[m]$ 是 R-n 模同态．

命题1 设 R 为含单位元的交换环，任意 A，$B\in \mathrm{ob}_R M_n^{l}$，则存在 $A\otimes_n B\in \mathrm{ob}_R M_n^{l'}$ 及 R-n 双线性函数 f: $A\times B\to A\otimes_n B$ 即

$$\begin{tikzcd}
A\times B \arrow[r, "f"] \arrow[d] & A\otimes_n B \arrow[dl, "h"] \\
M &
\end{tikzcd}$$

$$f((a_1+a_2+\cdots+a_n,b))$$
$$=f((a_1,b))+f((a_2,b))+\cdots+f((a_n,b)),$$
$$f((a,b_1+b_2+\cdots+b_n))=f((a,b_1))+f((a,b_2))+\cdots+f((a,b_n)),$$
$$f(ra,b))=rf((a,b))=f((a,rb))$$

具下列泛性质：对任一 $M\in \mathrm{ob}_R M_n^{l'}$ 及任一 R-n 双线性函数 g: $A\times B\to M$，存在唯一的 R-n 模同态 h: $A\otimes_n B\to M$，使上图交换：即 $g=hf$．

证明 $A\times B$ 为一集合，故存在 $F(A\times B)=\sum_{(a,b)\in A\times B}\oplus Re_{(a,b)}\in \mathrm{ob}_R M_n^{l'}$ 及函数 p: $A\times B\to F(A\times B)$．记 $d_0=\sum_{(a,b)\in A\times B}0e_{(a,b)}\in\widetilde{F(A\times B)}$．

令 $A\otimes_n B=F(A\times B)/D$，其中 D 是由下列元素生成的 $F(A\times B)$ 的子模：

$$D_1=\{e_{(a_1+a_2+\cdots+a_n,b)}+(-1)e_{(a_1,b)}+\cdots+(-1)e_{(a_n,b)}+\underbrace{d_0+\cdots+d_0}_{n-2}\mid a_i\in A,\ b\in B\};$$

$$D_2=\{e_{(a,b_1+b_2+\cdots+b_n)}+(-1)e_{(a,b_1)}+\cdots+(-1)e_{(a,b_n)}+\underbrace{d_0+\cdots+d_0}_{n-2}\mid a\in A,\ b_i\in B\};$$

$$D_3=\{e_{(ra,b)}+(-r)e_{(a,b)}+\underbrace{d_0+\cdots+d_0}_{n-2}\mid r\in R,\ a\in A,\ b\in B\};$$

$$D_4=\{e_{(a,rb)}+(-r)e_{(a,b)}+\underbrace{d_0+\cdots+d_0}_{n-2}\mid r\in R,\ a\in A,\ b\in B\},$$

这里 $e_{(a,b)}=\sum_{(s,t)\in A\times B}r_{(s,t)}e_{(s,t)}$，其中 $r_{(s,t)}=\begin{cases}1, & (s,t)=(a,b),\\ 0, & (s,t)\neq(a,b).\end{cases}$

因 $d_0=e_{(1\cdot a,b)}+(-1)e_{(a,b)}+\underbrace{d_0+\cdots+d_0}_{n-2}\in D_3\subseteq D$，即 $\widetilde{F(A\times B)}\subseteq D$，故 $A\otimes_n B=F(A\times B)/D\in \mathrm{ob}_R M_n^{l'}$．

令 $f=np$: $A\times B\to A\otimes_n B$，其中 n: $F(A\times B)\to A\otimes_n B$: $x\mapsto[x]$．易知：

$$[e_{(a_1+a_2+\cdots+a_n,b)}]=[e_{(a_1,b)}]+[e_{(a_2,b)}]+\cdots+[e_{(a_n,b)}];$$
$$[e_{(a,b_1+b_2+\cdots+b_n)}]=[e_{(a,b_1)}]+[e_{(a,b_2)}]+\cdots+[e_{(a,b_n)}];$$
$$[e_{(ra,b)}]=r[e_{(a,b)}]=[e_{(a,rb)}],$$

故 f 为 R-n 双线性函数．

任一 $M\in\mathrm{ob}_R M_n^l$ 及任一 R-n 双线性函数 g: $A\times B\to M$，存在 R-n 模同态 h': $F(A\times B)\to M$，使 $g=h'p$．令 h: $A\otimes_n B\to M$：$[x]\mapsto h'(x)$．显然，$D=\{\sum_{i=1}^{k(n-1)+1} r_i d_i \mid r_i\in R,\ d_i\in D_1\cup D_2\cup D_3\cup D_4\}$，任意 $d_i\in D_1\cup D_2\cup D_3\cup D_4$，$h'(d_i)=m_0\in\widetilde{M}$，从而任意 $d\in D$，$h'(d)=m_0$．若 $[x]$，$[y]\in A\otimes_n B$，且 $[x]=[y]$，即 $x=y+d'_1+d'_2+\cdots+d'_{n-1}$，$d_i\in D$，则 $h'(x)=h'(y+d'_1+d'_2+\cdots+d'_{n-1})=h'(y)+\underbrace{m_0+m_0+\cdots+m_0}_{n-1}=h'(y)$，因而 h 是一映射．容易证明，h 是 R-n 模同态，且 $g=h'p=hnp=hf$，即下图交换：

$$\begin{tikzcd}
A\times B \arrow[r, "p"] \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[d, "g"'] & F(A\times B) \arrow[r, "n"] \arrow[dl, "h'"'] & F(A\times B)/D=A\otimes_n B \arrow[dll, "h"] \\
M & &
\end{tikzcd}$$

若存在 R-n 模同态 h_1: $A\otimes_n B\to M$，且 $h_1f=hf=g$，则任意 $\sum_{(a,b)\in A\times B} r_{(a,b)}[e_{(a,b)}]\in A\otimes_n B$，$h_1(\sum_{(a,b)\in A\times B} r_{(a,b)}[e_{(a,b)}])=\sum r_{(a,b)}h_1([e_{(a,b)}])=\sum r_{(a,b)}h_1f((a,b))=\sum r_{(a,b)}hf((a,b))=h(\sum_{(a,b)\in A\times B} r_{(a,b)}[e_{(a,b)}])$，即 $h_1=h$．

$A\otimes_n B$ 称作 A 与 B 的 R-n 模张量积．以下记 $[e_{(a,b)}]$ 为 $a\otimes_n b$．

设 M，M'，N，$N'\in\mathrm{ob}_R M_n^l$，f: $M\to M'$，g: $N\to N'$ 为 R-n 模同态．因 h: $M\times N\to M'\otimes_n N'$：$(m,n)\mapsto f(m)\otimes_n g(n)$ 是 R-n 双线性的，故存在 R-n 模同态 $f\otimes_n g$: $M\otimes_n N\to M'\otimes_n N'$：$m\otimes_n n\mapsto f(m)\otimes_n g(n)$．易知，任意 $M\in\mathrm{ob}_R M_n^l$，$\left.\begin{matrix} M\otimes_n — \\ I_M\otimes_n — \end{matrix}\right\}$ 定义了一个函子：${}_R M_n^l\to {}_R M_n^{l'}$，我们称其为张量函子．

命题 2　设 R 为含单位元的交换环，任意 M，$M_0\in\mathrm{ob}_R M_n^l$，$N_0\in\mathrm{ob}_R M_n^{l'}$，则存在 $R-n$ 模同构映射 η：$\mathrm{Hom}_R(M\otimes_n M_0, N_0)\to\mathrm{Hom}_R(M_0, \mathrm{Hom}_R(M, N_0))$，且对 M_0，N_0 是自然的．

注　若 R 是交换环，A，B 为左 R-n 模，定义 $a\cdot r=r\cdot a$，则 A 为 $(R$-$R)$-双模，定义 $(rf)(a)=f(ar)$，则 $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ 为 R-n 模．

证明　任意 $f\in\mathrm{Hom}_R(M\otimes_n M_0, N_0)$，任意 $m_0\in M_0$，令 f_{m_0}: $M\to N_0$: $m\mapsto f(m\otimes_n m_0)$，则 $f_{m_0}\in\mathrm{Hom}_R(M, N_0)$．定义 g: $m_0\mapsto f_{m_0}$，则 $g\in\mathrm{Hom}_R(M_0, \mathrm{Hom}_R(M, N_0))$．我们定义 η: $f\mapsto g$．

任意 $g\in\mathrm{Hom}_R(M_0, \mathrm{Hom}_R(M, N_0))$，令 h: $M\times M_0\to N_0$: $(m, m_0)\mapsto[g(m_0)](m)$，则 h 是 R-n 双线性映射．又 $N_0\in\mathrm{ob}_R M_n^{l'}$，于是存在 $f\in\mathrm{Hom}_R(M\otimes_n M_0, N_0)$，$f(m\otimes m_0)=h((m, m_0))=[g(m_0)](m)$，即 $\eta(f)=g$，η 为满．

任意 f_1，$f_2\in\mathrm{Hom}_R(M\otimes_n M_0, N_0)$，若 $\eta(f_1)=\eta(f_2)=g$，则 $f_1(m\otimes_n m_0)=[g(m_0)](m)=f_2(m\otimes_n m_0)$，即 $f_1=f_2$，η 为单．

可以验证，η 是 R-n 模同态，且对 M_0，N_0 是自然的．

由此可知，下面定理成立：

定理 1　设 R 为含单位元的交换环，$M\in \mathrm{ob}_R M_n^l$，则函子 $M\otimes_n—:{}_RM_n^l\to {}_RM_n^{l'}$ 与 $\mathrm{Hom}_R(M,—):{}_RM_n^{l'}\to {}_RM_n^l$ 是一对伴随函子.

最后，我们讨论张量函子的拟正合性.

定理 2　设 R 为含单位元的交换环，在 ${}_RM_n^l$ 中若 $M_1\to M_2\to M_3\to\{m_0\}$ 为全正合列，则在 ${}_RM_n^{l'}$ 中存在全正合列 $M\otimes_n M_1\to M\otimes_n M_2\to M\otimes_n M_3\to\{m_0\}$，其中 $M\in\mathrm{ob}_R M_n^l$.

证明　由命题 2 知，在 ${}_RM_n^l$ 中下面交换图成立：

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Hom}_R(M\otimes_n\{m_0\},N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(M\otimes_n M_3,N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(M\otimes_n M_2,N) & \longrightarrow & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathrm{Hom}_R(\{m_0\},\mathrm{Hom}_R(M,N)) & \to & \mathrm{Hom}_R(M_3,\mathrm{Hom}_R(M,N)) & \to & \mathrm{Hom}_R(M_2,\mathrm{Hom}_R(M,N)) & \to &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\to \mathrm{Hom}_R(M\otimes_n M_1,N)\\
\downarrow\\
\to \mathrm{Hom}_R(M_1,\mathrm{Hom}_R(M,N))
\end{array}$$

其中 $N\in\mathrm{ob}_R M_n^{l'}$. 因 $\widetilde{\mathrm{Hom}_R(M,N)}=\{0\cdot f\mid f\in\mathrm{Hom}_R(M,N)\}$，任意 $m\in M$，$(0\cdot f)(m)=0\cdot f(m)=n_0\in\widetilde{N}$，即 $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ 为独点集. 由[1]定理20知，图中第二行为拟全正合列. 又 $\widetilde{\mathrm{Hom}_R(M_1,\mathrm{Hom}_R(M,N))}=\{\varphi\in\mathrm{Hom}_R(M_1,\mathrm{Hom}_R(M,N))\mid$ 任意 $m\in M_1,\varphi(m)\in\widetilde{\mathrm{Hom}_R(M,N)}\}$，因而，其亦为全正合列.

因 $N,\mathrm{Hom}_R(M,N)\in\mathrm{ob}_R M_n^{l'}$，$\mathrm{Hom}_R(M\otimes_n M_i,N)$，$\mathrm{Hom}_R(M_i,\mathrm{Hom}(M,N))\in\mathrm{ob}_R M_n^{l'}$，故可在 ${}_RM$ 中考察上述交换图. 图中第二行为正合列，从而第一行亦为正合列. 又 N 是任意的，由[3]引理2.13知，$M\otimes_n M_1\to M\otimes_n M_2\to M\otimes_n M_3\to\{m_0\}$ 是 ${}_RM$ 中的正合列，亦即 ${}_RM_n^{l'}$ 中的全正合列.

参 考 文 献

[1] 于永溪，数学研究与评论，4 (1982)，p. 21—30.

[2] 王少武、数学研究与评论，1(1985)，p. 17—24.

[3] Rotman, Joseph. J., An introduction to homological algebra. New york Academic Pr, 1979.

Tensor Functor Defined on the Category ${}_RM_n^l$

Liu Yuren

Abstract

In this paper, we define a tensor functor on the category of R-n modules, where R is a commutative ring with 1, and prove the following theorems:

Theorem 1 If M is an object of ${}_RM_n^l$, then $(M\otimes_n—, \mathrm{Hom}_R(M, —))$ is an adjoint pair.

Theorem 2 In the category ${}_RM_n^l$, total exactness of $M_1\to M_2\to M_3\to\{m_0\}$ implies total exactness of $M\otimes_n M_1\to M\otimes_n M_2\to M\otimes_n M_3\to\{m_0\}$, where M is an object of ${}_RM_n^l$.

In addition, we discuss the category ${}_RM_n^{\gamma'}$ and the free R-n modules.

接522页

参 考 文 献

[1] 杨路、张景中，关于有限点集的一类几何不等式，数学学报，23:5(1980)，740—749.

[2] 杨路、张景中，度量方程应用于Sallee猜想，数学学报，26:4(1983)，488—493.

[3] 杨路、张景中，Neuberg-Padoe不等式的高维推广，数学学报，24:3(1981)，401—408.

[4] 杨路、张景中，预给二面角的单形嵌入E^n的充分必要条件，数学学报，26:2(1983).

[5] 张景中、杨路，关于有限质点组的一类几何不等式，中国科技大学学报，11:2(1981)，250—256.

An Inequality on n-Dimensiond Simplex

Leng Gangsong

(No.7 Middle-school, Ping Jiang Hunan)

Abstract

Let $x_1, x_2, \cdots, x_n$ are vectors set out from any vertex of n-simplex. The included angle of x_i and x_j is a_{ij}, and $G=\sum_{i<j} a_{ij}$, the volume of this simplex is V. In this paper, we prove the inequality as below:

$$V<\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n}\|x_i\|\sin^{n-1}\frac{G}{\binom{n}{2}} \qquad (*)$$

When $n=2$, the equality holds in $(*)$, when $n>3$, the equality holds in $(*)$ if $\{x_i\}$ is orthogonal set.