第10卷 第4期
1990年11月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.10 No.4
Nov., 1990

非等距划分下样条函数的渐近展开*

毛泽春

（湖北大学数学系，武汉）

摘　　要

本文采用传递插值的方法对非等距划分情况下亏度为（$n-1$）的（$2n-1$）次缺插值样条函数余项进行了渐近展开，得到了较普遍的结果。这种方法对非等距情况下的渐近展开具有普遍的意义。

§1．双边基样条的构造及衰减性质

设$\triangle$为〔0,1〕区间上非等距一致划分：$0=x_0<x_1<\cdots<x_N=1$，$\widetilde{\triangle}$是$\triangle$上的扩充一致划分：$x_{-\infty}<\cdots<x_{-1}<x_0<x_1<\cdots<x_N<\cdots<x_{+\infty}$；即满足$\frac{\max\{h_i\}}{\min\{h_i\}}\leqslant M$（正常数），其中$h_i=x_{i+1}-x_i$，$(i\in Z)$．记$h=\max\{h_i\}$ 用$Sp(\triangle)$，$Sp(\widetilde{\triangle})$分别表示划分$\triangle$及$\widetilde{\triangle}$上的亏度为$n-1$的$2n-1$次样条空间。对固定的$i\in Z$，设$p_i(x)\in Sp(\widetilde{\triangle})$并满足：$p_i(x)\equiv0$，当$x\leqslant x_{i-1}$时；$P_i(x_j)=\delta_{ij}$、$P_i^{(k)}(x_j)=0$，当$j\geqslant i$时，$(k=3,4,\cdots n)$．设$Q_i(x)\in Sp(\widetilde{\triangle})$并满足以下条件：$Q_i(x)\equiv0$，当$x\geqslant x_{i+1}$时；$Q_i(x_j)=\delta_{ij}$，$Q_i^{(k)}(x_j)=0$，当$j\leqslant i$时，$(k=3,4,\cdots n)$．令$\widetilde{L}_{0,i}(x)=\frac{1}{2}〔P_i(x)+Q_i(x)〕$显然$\widetilde{L}_{0,i}(x)\in SP(\widetilde{\triangle})$且$L_{0,i}(x_j)=\delta_{ij}$;$L_{0,i}^{(l)}(x_j)=0$，$(i,j\in \mathbf{Z},l=3,4,\cdots n)$．

仿文〔1〕的方法可得

引理1　当$x\in〔x_j,x_{j+1}〕$时，$|\widetilde{L}_{0,i}^{(q)}(x)|=O(h^{-q}\cdot e^{-\beta|i-j|})$，其中$i,j\in\mathbf{Z}$;$q=0,1,\cdots n$，$\beta$为正常数．

类似于$\widetilde{L}_{0,i}(x)$的构造，设$P_{\nu,i}(x)$，$Q_{\nu,i}(x)\in Sp(\widetilde{\triangle})$　$(\nu=3,4,\cdots n)$，并满足：$P_{\nu,i}(x)\equiv0$，当$x\leqslant x_{i-1}$时；$P_{\nu,i}^{l}(x_j)=\delta_{ij}\cdot\delta_{\nu l}$，当$j\geqslant i$时；$Q_{\nu,i}(x)\equiv0$，当$x\geqslant x_{i+1}$时；$Q_{\nu,i}^{l}(x_j)=\delta_{ij}\cdot\delta_{\nu,l}$，当$j\leqslant i$时：$(l=3,4,\cdots n)$ 并令：$\widetilde{L}_{\nu,i}(x)=\frac{1}{2}〔P_{\nu,i}(x)+Q_{\nu,i}(x)〕$则有$\widetilde{L}_{\nu,i}(x)\in sp(\widetilde{\triangle})$ 且$\widetilde{L}_{\nu,i}(x_j)=0$，$\widetilde{L}_{\nu,i}^{(l)}(x_j)=\delta_{ij}\cdot\delta_{\nu l}$

引理1′　当$x\in〔x_j,x_{j+1}〕$时，$|\widetilde{L}_{\nu,i}^{(q)}(x)|=O(h^{\nu-q}e^{-\beta|i-j|})$　其中$i,j\in\mathbf{Z}$，$\nu=3,4,\cdots n$；$q=0,1,\cdots n$．

---

* 1988年3月23日收到，1990年3月8日收到修改稿

§ 2 $SP(\Delta)$ 的基样条的衰减性质

设 $L_{v,i}(x)$，$L_{1,0}(x)$，$L_{1,N}(x)$，$(i=0,1,\cdots N,\ v=0,3,4,\cdots n)$ 是 $Sp(\Delta)$ 的Ⅰ型插值样条，即满足：

$$L^{l}_{r,i}(x_j)=\delta_{ij}\delta_{re} \qquad L^{l}_{1,m}(x_j)=0$$
$$L'_{v,i}(x_k)=0 \qquad L'_{1,m}(x_k)=\delta_{mk}$$

$i,j=0,1,\cdots N$；$v,l=0,3,4,\cdots n$；$m,k=0,N$ 由样条函数零点的Budan-Fourier定理可得

引理 2 $\{\widetilde{L}_{v,i}(x)\}^{i=0,1,\cdots N}_{v=0,3,\cdots n}$ 及 $\{\widetilde{L}_{0,-1}(x)\widetilde{L}_{0,N+1}(x)\}$ 一起构成 $sp(\triangle)$ 的一组基.

类似于文〔1〕有

引理 3 $|L^{(q)}_{v,i}(x)|=O(h^{-q+v}e^{-\beta|i-j|})$；$|L^{(q)}_{1,0}(x)|=O(h^{-q+1}e^{-\beta j})$；

$|L^{(q)}_{1,N}(x)|=O(h^{-q+1}e^{-\beta(N-j)})$；$x\in[x_j,x_{j+1}]$，$q=0,1,\cdots n$.

为此，对任意满足Ⅰ型插值条件 $S(x)\in Sp(\Delta)$；$S^{(l)}(x_i)=f^{(l)}(x_i)$；$S'(x_0)=f'(x_0)$；$S'(x_N)=f'(x_N)$，$(i=0,1,\cdots N)$，$(l=0,3,4,\cdots 4)$ 的样条函数 $S(x)$ 可表为Lagrange形式 $S(x)=\sum\limits_{i=0}^{N}\sum\limits_{\substack{v=0\\ v\neq 1,2}}^{n}f^{(v)}(x_i)L_{v,i}(x)+f'(x_0)L_{1,0}(x)+f'(x_N)L_{1,N}(x)$

§ 3 余项的渐近展开式

设 $f(x)\in C^r([0,1])$，$r\geqslant 2n$，记 $w(f,s)=\max\limits_{\substack{x_1,x_2\in[0,1]\\ |x_1-x_2|<s}}|f(x_1)-f(x_2)|$，$(0<\delta<1)$ 并记 $R^{(q)}_x(f)=f^{(q)}(x)-S^{(q)}(x)$，$(q=0,1,\cdots n)$

通过Peano核定理及 § 2 的引理可证得主要

定理 1 $R^{(q)}_x(f)=\sum\limits_{p=2n}^{r}f^{(p)}(x)\phi_{p,q}(x)+O(h^{r-q}\cdot w(f^{(r)},h))$ $q=0,1,\cdots n$，$O(\cdot)$ 与分划无关，且 $\phi_{p,q}(x)$ 是仅与 p,q 有关的有界量.

$$\phi_{p,q}(x)=-\sum_{i=0}^{N}\sum_{\substack{v=0\\ v\neq 1,2}}^{n}\left[\frac{(x_i-x)^{p-v}}{(p-v)!}L^{q}_{v,i}(x)\right]-\frac{(x_0-x)^{p-1}}{(p-1)!}L^{(q)}_{1,0}(x)-\frac{(x_N-x)^{p-1}}{(p-1)!}L^{(q)}_{1,N}(x)$$

同理对满足Ⅱ型插值条件：$S(x)\in Sp(\triangle)$ 且 $S^{(l)}(x_j)=f^{(l)}(x_j)$；$S''(x_0)=f''(x_0)$；$S''(x_N)=f''(x_N)$；$(l=0,3,4,\cdots N;\ j=0,1,\cdots N)$ 的样条 $S(x)$ 亦有

定理 1′ $R^{(q)}_x(f)=\sum\limits_{p=2n}^{r}f^{(p)}(x)\psi_{p,q}(x)+O(h^{r-q},w(f^{(r)},h))$

其中
$$\psi_{p,q}(x)=-\sum_{i=0}^{N}\sum_{\substack{v=0\\ v\neq 1,2}}^{n}\left[\frac{(x_i-x)^{p-v}}{(p-v)!}L^{(q)}_{v,i}(x)\right]-\frac{(x_0-x)^{p-2}}{(p-2)!}L^{q}_{2,0}(x)-\frac{(x_N-x)^{p-2}}{(p-2)!}L^{(q)}_{2,N}(x)$$

这里 $L_{v,i}(x)$，$L_{2,0}(x)$，$L_{2,N}(x)$ 是 $Sp(\triangle)$ 的Ⅱ型插值基函数即满足：$L^{(l)}_{v,i}(x_j)=\delta_{ij}\delta_{vl}$；

$L''_{\nu,i}(x_k)=0$; $L'_{1,m}(x_j)=0$; $L''_{1,m}(x_k)=\delta_{mk}$; $i,j=0,1,\cdots N$; $\nu,l=0,3,4,\cdots n$; $m,k=0,N$.

参 考 文 献

〔1〕孙俊逸，毛泽春，非等距三次Ⅰ型插值样条函数余项的渐近展开，安徽大学学报，1(1988).

〔2〕陈天平，样条函数的渐近展开，中国科学（A辑），5(1983).

〔3〕Thumas R. Lucas, Asymptotic Expansion for interpolation Periodic Splines, SIAM J.Numer. Anal, No.5, Oct. 1982.

The Asymptotic Expansion of Spline Fuctions on Non-Isometric Cut

Mao Zechun

(Hubei University)

In this paper, we have obtained the aysmptotic expansion for $(2n-1)$-degree interpolation splines on non-isometric by introduction of the transfering interpolation and the Peano Therom.