第10卷 第4期 数学研究与评论 Vol.10 No.4
1990年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 1990

体上逆阵的子阵的一个注记*

屠伯埙

(复旦大学数学系，上海)

用群表示论研究有限群的子群的构造时，我们遇到了如下必需解决的问题:“找出体上方阵的逆阵的子矩阵的逆与原矩阵的子阵及其某个子阵的逆的关系”.这一问题的解决不仅对表示与子表示之间的联系、且对复矩阵论较深入的领域—矩阵的“子结构”亦是相当有用的.本短文将用一特殊技巧来解决上述问题.

以下恒以Ω表示一个体．对Ω上 $m\times n$ 阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，记 A 的如下的 $p\times q$ 子矩阵：

$$A(i_1,\cdots,i_p;\ j_1,\cdots,j_q)=\begin{bmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_q}\\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_q}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i_pj_1} & a_{i_pj_2} & \cdots & a_{i_pj_q}\end{bmatrix} \tag{1}$$

其中 $1\leq i_1<\cdots<i_p\leq m$; $1\leq j_1<\cdots<j_q\leq n$.

设0,1分别是Ω的零元与么元，记 $e_j=(0,\cdots,0,\overset{\text{第}j\text{行}}{1},0,0,\cdots,0)'$，($a'$ 表示 a 的转置)，则易知

$$A(i_1,\cdots,i_p;\ j_1,\cdots,j_q)=\begin{bmatrix} e_{i'_1}\\ e_{i'_2}\\ \vdots\\ e_{i'_p}\end{bmatrix}A(e_{j_1},e_{j_2},\cdots,e_{j_q}) \tag{2}$$

又记

$$A(i_1,\cdots,i_p;\ j_1,\cdots,j_p)=A\begin{bmatrix} i_1 & \cdots & i_p\\ j_1 & \cdots & j_p\end{bmatrix} \tag{3}$$

定理 设 A 是Ω上 n 阶非奇异阵，$i_1\cdots i_pi_{p+1}\cdots i_n$ 与 $j_1\cdots j_pj_{p+1}\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的两个排列($1\leq i_1<\cdots<i_p;i_{p+1}<\cdots<i_n;1\leq j_1<\cdots<j_p;j_{p+1}<\cdots<j_n$)，如果 $A\begin{bmatrix} j_{p+1} & \cdots & j_n\\ i_{p+1} & \cdots & i_n\end{bmatrix}$ 是非异阵，则 $A^{-1}\begin{bmatrix} i_1 & \cdots & i_p\\ j_1 & \cdots & j_p\end{bmatrix}$ 亦是非异阵，并且

---

* 1988年9月8日收到.

$$\left[A^{-1}\begin{bmatrix} i_1 & \cdots & i_p \\ j_1 & \cdots & j_p \end{bmatrix}\right]^{-1}$$

$$= A\begin{bmatrix} j_1 & \cdots & j_p \\ i_1 & \cdots & i_p \end{bmatrix} - A(j_1, \cdots, j_p; i_{p+1}, \cdots, i_n)\left[A\begin{bmatrix} j_{p+1} & \cdots & j_n \\ i_{p+1} & \cdots & i_n \end{bmatrix}\right]^{-1} A(j_{p+1}, \cdots, j_n; i_1, \cdots, i_p). \tag{4}$$

证明 记

$$P_{(i)} = (e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}, e_{i_{p+1}}, \cdots, e_{i_n}),\quad P_{(j)} = (e_{j_1}, \cdots, e_{j_p}, e_{j_{p+1}}, \cdots, e_{j_n}),$$

则易证

$$P'_{(j)} A P_{(i)} = \begin{bmatrix} A\begin{bmatrix} j_1 & \cdots & j_p \\ i_1 & \cdots & i_p \end{bmatrix} & A(j_1, \cdots, j_p; i_{p+1}, \cdots, i_n) \\ A(j_{p+1}, \cdots, j_n; i_1, \cdots, i_p) & A\begin{bmatrix} j_{p+1} & \cdots & j_n \\ i_{p+1} & \cdots & i_n \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{5}$$

以I_p表示Ω上p阶单位阵，由（5）式可得

$$\begin{bmatrix} P'_{(j)} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & (e_{j_1}, \cdots, e_{j_p}) \\ -\begin{bmatrix} e_{i_1} \\ \vdots \\ e_{i_p} \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{(j)} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P'_{(j)} A P_{(i)} & P'_{(j)}(e_{j_1}, \cdots, e_{j_p}) \\ -\begin{bmatrix} e_{i'_1} \\ \vdots \\ e_{i'_p} \end{bmatrix} P_{(i)} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A\begin{bmatrix} j_1 & \cdots & j_p \\ i_1 & \cdots & i_p \end{bmatrix} & A(j_1, \cdots, j_p; i_{p+1}, \cdots, i_n) & I_p \\ (j_{q+1}, \cdots, j_n; i_1, \cdots, i_p) & A\begin{bmatrix} j_{p+1} & \cdots & j_n \\ i_{p+1} & \cdots & i_n \end{bmatrix} & 0 \\ -I_p & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

今先证第一个结论．以$r(M)$表示Ω上矩阵M的（左行）秩（即右列秩），则由（2）式及秩的升阶公式[1]可得

$$r\left[A^{-1}\begin{bmatrix} i_1 & \cdots & i_p \\ j_1 & \cdots & j_p \end{bmatrix}\right] = r\begin{bmatrix} A & (e_{j_1}, \cdots, e_{j_p}) \\ -\begin{bmatrix} e_{i'_1} \\ \vdots \\ e_{i'_p} \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix} - n,$$

由体上矩阵秩的理论[2]及(6)式，上式可化为

$$r\left[A^{-1}\begin{bmatrix} i_1 & \cdots & i_p \\ j_1 & \cdots & j_p \end{bmatrix}\right] = r\begin{bmatrix} * & * & I_p \\ * & A\begin{bmatrix} j_{p+1} & \cdots & j_n \\ i_{p+1} & \cdots & i_n \end{bmatrix} & 0 \\ -I_p & 0 & 0 \end{bmatrix} - n$$

$$= r\left[A\begin{bmatrix} j_{p+1} & \cdots & j_n \\ i_{p+1} & \cdots & i_n \end{bmatrix}\right] + 2p - n,$$

再由假设 $A\begin{bmatrix} j_{p+1} & \cdots & j_n \\ i_{p+1} & \cdots & i_n \end{bmatrix}$是非异阵，即其秩为 $n-p$[2]，故由上式即得 $r\left[A^{-1}\begin{bmatrix} i_1 & \cdots & i_p \\ j_1 & \cdots & j_p \end{bmatrix}\right]$ $=p$，即 $A^{-1}\begin{bmatrix} i_1 & \cdots & i_p \\ j_1 & \cdots & j_p \end{bmatrix}$是非异阵[2].

下面证(4)式．与常规的复矩阵一样，易证：若 A 是 Ω 上 n 阶非异阵，且其 k 阶顺序主子阵 $A_k = A\begin{bmatrix} 1 & \cdots & k \\ 1 & \cdots & k \end{bmatrix}$亦非异，$1 < k < n-1$，则

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & (A/A_k)^{-1} \end{bmatrix}^{[3]} \tag{7}$$

此处(与复矩阵论一样)，A/A_k表示 A关于 A_k的Schur补，即若 $A=\begin{bmatrix} A_k & B \\ C & D \end{bmatrix}$，则 $A/A_k = D-CA_k^{-1}B$．由(7)式显然可知

$$(A/A_k)^{-1} = A^{-1}\begin{bmatrix} k+1 & \cdots n \\ k+1 & \cdots n \end{bmatrix} \tag{8}$$

今对 A 作下面的 $n+p$阶阵：

$$M = \begin{bmatrix} A & (e_{j_1}, \cdots, e_{j_p}) \\ -\begin{bmatrix} e_{i'_1} \\ \vdots \\ e_{i'_p} \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix}$$

Schur补的定义，并应用(2)式，则恰好有 $A^{-1}\begin{bmatrix} i_1 & \cdots & i_p \\ j_1 & \cdots & j_p \end{bmatrix} = M/A$，于是将(8)式运用于上述 $n+p$阶阵 M，即得

$$\left[A^{-1}\begin{bmatrix} i_1 & \cdots & i_p \\ j_1 & \cdots & j_p \end{bmatrix}\right]^{-1} = (M/A)^{-1} = M^{-1}\begin{bmatrix} n+1 & \cdots & n+p \\ n+1 & \cdots & n+p \end{bmatrix} \tag{9}$$

现在计算 $M^{-1}\begin{bmatrix} n+1 & \cdots & n+p \\ n+1 & \cdots & n+p \end{bmatrix}$，先算出$M^{-1}$．由(6)式以及 $P'_{(j)}P_{(j)} = I_n$ 可算得

$$M^{-1}=\begin{bmatrix} P_{(j)} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A\begin{bmatrix} j_1\cdots j_p \\ i_1\cdots i_p \end{bmatrix} & A(j_1,\cdots,j_p;i_{p+1},\cdots,i_n) & I_p \\ A(j_{p+1},\cdots,j_n;i_1,\cdots,i_p) & A\begin{bmatrix} j_{p+1}\cdots j_n \\ i_{p+1}\cdots i_n \end{bmatrix} & 0 \\ -I_p & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P'_{(i)} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} P_{(j)} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -I_p \\ 0 & \left[A\begin{bmatrix} j_{p+1}\cdots j_n \\ i_{p+1}\cdots i_n \end{bmatrix}\right]^{-1} & C_1 \\ \hline I_p & B_1 & K \end{array}\right]\begin{bmatrix} P'_{(i)} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}=\begin{array}{c} \\ n \\ p \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} n & p \end{array} \\ \begin{bmatrix} * & * \\ * & K \end{bmatrix} \end{array}, \tag{10}$$

其中:

$$B_1=A(j_1\cdots,j_p;i_{p+1},\cdots,i_n)\left[A\begin{bmatrix} j_{p+1}\cdots j_n \\ i_{p+1}\cdots i_n \end{bmatrix}\right]^{-1}$$

$$C_1=\left[A\begin{bmatrix} j_{p+1}\cdots j_n \\ i_{p+1}\cdots i_n \end{bmatrix}\right]^{-1}A(j_{p+1},\cdots,j_n;i_1,\cdots,i_p),$$

$$K=A\begin{bmatrix} j_1\cdots j_p \\ i_1\cdots i_p \end{bmatrix}-A(j_1,\cdots,j_p;i_{p+1},\cdots,i_n)\left[A\begin{bmatrix} j_{p+1}\cdots j_n \\ i_{p+1}\cdots i_n \end{bmatrix}\right]^{-1}A(j_{p+1},\cdots,j_n,i_1\cdots,i_p), \tag{11}$$

由(9)、(10)、(11)三式即得(4)式. 证毕.

当A是Ω上对合阵(即 $A^2=I_n$), 则由 $A^{-1}=A$及定理便得

系 1 设A是Ω上n阶对合阵, 且 $A\begin{bmatrix} j_{p+1}\cdots j_n \\ i_{p+1}\cdots i_n \end{bmatrix}$是非异阵, 则 $A\begin{bmatrix} i_1\cdots i_p \\ j_1\cdots j_p \end{bmatrix}$亦是非异阵, 且

$$\left[A\begin{bmatrix} i_1\cdots i_p \\ j_1\cdots j_p \end{bmatrix}\right]^{-1}$$

$$=A\begin{bmatrix} j_1\cdots j_p \\ i_1\cdots i_p \end{bmatrix}-A(j_1,\cdots,j_p;i_{p+1},\cdots,i_p)\left[A\begin{bmatrix} j_{p+1}\cdots j_n \\ i_{p+1}\cdots i_n \end{bmatrix}\right]^{-1}A(j_{p+1};j_n;i_1,\cdots,i_p). \tag{12}$$

(12)式正好说明: 对合阵的高阶子阵的逆可归结为低阶子阵的逆而得出.

在定理中特别取$p=n-1$, 并经简单的矩阵运算, 即得

系 2 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$是Ω上非异阵, $i_1,\cdots i_p i_{p+1}\cdots i_n$与 $j_1\cdots j_p j_{p+1}\cdots j_n$是$1,2,\cdots,n$的两个排列, 且 $a_{j_n i_n}$是Ω的非零元, 则 $A^{-1}\begin{bmatrix} i_1\cdots i_{n-1} \\ j_1\cdots j_{n-1} \end{bmatrix}$是非异阵, 并且

$$\left[A^{-1}\begin{bmatrix} i_1 & \cdots & i_{n-1} \\ j_1 & \cdots & j_{n+1} \end{bmatrix}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} a_{j_1 i_1} - a_{j_1 i_n} a_{j_n i_n}^{-1} a_{j_n i_1} & \cdots & a_{j_1 i_{n-1}} - a_{j_1 i_n} a_{j_n i_n}^{-1} a_{j_n i_{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j_{n-1} i_1} - a_{j_{n-1} i_n} a_{j_n i_n}^{-1} a_{j_n i_1} & \cdots & a_{j_{n-1} i_{n-1}} - a_{j_{n-1} i_n} a_{j_n i_n}^{-1} a_{j_n i_{n-1}} \end{bmatrix} \tag{13}$$

当A是对合阵时，(13) 式就成为$\left[A\begin{bmatrix} i_1 & \cdots & i_{n-1} \\ j_1 & \cdots & j_{n+1} \end{bmatrix}\right]^{-1}$的明显算式。

参 考 文 献

[1] 屠伯埙，p-除环上矩阵的广义逆，数学学报，29:2(1986)，246—248.

[2] 华罗庚，万哲先，典型群，上海科技出版社，1963.

[3] 屠伯埙，线性代数方法导引，复旦大学出版社，1986.

A Note on the Submatrices of an Inverting Matrix Over a Skew Field

Tu Boxun

(Fudan University)

Abstract

The inverses of the submatrices of an inverting matrix will play an important role in the group representation theory. This note provides an explicit formula on the inverse of the submatrix of an inverting matrix by means of several subnlatrices as well as the inverse matrix of one submatrix of this matrix.