第10卷 第4期
1990年11月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.,10 No.4
Nov., 1990

关于图的一种新分解*

马克杰　　　陈怀堂

(曲阜师范大学)　　(临沂师范专科学校)

摘　要

Alavi等人在[1]中定义了图的一种新分解，即升分解，并提出猜想：设G是星$s_1, s_2, \cdots, s_k$的并图，s_i含有a_i条边，$n\leqslant a_i\leqslant 2n-2$，$\sum_{i=1}^{k} a_i=\binom{n+1}{2}$，则$G$可升分解为星图的并.

本文证明了出现下列条件之一时猜想成立.

1．$a_1, a_2, \cdots, a_k$中至少有$k-2$个a_i $(1\leqslant i\leqslant k)$相等；

2．$\max\{a_i \mid i=1,2,\cdots,k-1\}-\min\{a_i \mid i=1,2,\cdots,k-1\}\leqslant 1$.

一、序

Alavi等人在[1]中定义了图的升分解：已知图G和自然数n，G的边数q满足$\binom{n+1}{2}\leqslant q<\binom{n+2}{2}$。如果$G$能分解为$G_1, G_2, \cdots, G_n$的并，满足$G_i$与$G_{i+1}$的一个真子图同构$(1\leqslant i\leqslant n-1)$，$G_i$不含孤立点，则称这个分解为图$G$的一个升分解.

已知自然数$a_1, a_2, \cdots, a_k$，若集合$s=\{1,2,\cdots,n\}$可以划分成k个互不相交的子集$s_1, s_2, \cdots, s_k$．满足$a_i=\sum_{j\in s_i} j$，$1\leqslant i\leqslant k$，则称$a_1, a_2, \cdots, a_k$可分拆为$1,2,\cdots,n$．并称s_i为a_i的分拆式．若$s_i=\{a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \cdots, a_l^{(i)}\}$，就记作$a_i=[a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \cdots, a_l^{(i)}]$.

Alavi等人在[1]中猜想：设自然数$n\geqslant 2$，G是星$s_1, s_2, \cdots, s_k$的并图，s_i含有a_i条边，$n\leqslant a_i\leqslant 2n-2$，$\sum_{i=1}^{k} a_i=\binom{n+1}{2}$，则$G$可升分解为星的并.

显然，这个猜想可表达为如下的等价形式：

已知自然数$a_1, a_2, \cdots, a_k$满足$n\leqslant a_i\leqslant 2n-2$，$(1\leqslant i\leqslant k)$，$\sum_{i=1}^{k} a_i=\binom{n+1}{2}$，则$a_1, a_2, \cdots, a_k$可分拆为$1,2,\cdots,n$.

以上猜想是一个比较困难的问题，因为提出不久，还没有多少深刻的结果，我们得到如下结论.

* 1988年11月25日收到.

定理1 已知自然数$a_1, a_2, \cdots, a_k$满足$a_i \geqslant n(1 \leqslant i \leqslant n)$，$\sum_{i=1}^{k} a_i = \binom{n+1}{2}$，并且至少$k-2$个$a_i(1 \leqslant i \leqslant k)$相等，则$a_1, a_2, \cdots, a_k$可分拆为$1, 2, \cdots, n$.

定理2 已知自然数$a_1, a_2, \cdots, a_k$满足$a_i \geqslant n(1 \leqslant i \leqslant n)$，$\sum_{i=1}^{k} a_i = \binom{n+1}{2}$，并且$\max\{a_i | i=1,2,\cdots,k-1\} - \min\{a_i | i=1,2,\cdots,k-1\} \leqslant 1$，则$a_1, a_2, \cdots, a_k$可分拆为$1, 2, \cdots, n$.

二、定 理 的 证 明

1．定理1的证明

对n用数学归纳法．$n=2$时，显然．假设对一切小于n的自然数定理成立．对于n，不妨设$a_1 = a_2 = \cdots = a_{k-2} = a$．分三种情况讨论．

情况1 若$a = 2n-1 = n+(n-1)$．由归纳假设，$\overbrace{a, a, \cdots, a}^{k-3}, a_{k-1}, a_k$可分拆为$1, 2, \cdots, n-2$，因此$\overbrace{a, a, \cdots, a}^{k-2}, a_{k-1}, a_k$可分拆为$1, 2, \cdots, n$．（这个从$n$过渡到归纳假设的过程叫做可降阶的）．

情况2 若$a \leqslant 2n-2$．作分解

$$a = [n-i, a-(n-i)],\ i = 0, 1, \cdots, k-3. \tag{1}$$

①．若$a-n+k-3 \geqslant n-k+2$，则在（1）中存在$s, n-k+3 \leqslant s \leqslant n$，使$a-s=s$或$a-s=s-1$．当$a-s=s$时，因为$a-n, a-n+1, \cdots, a-s, s+1, \cdots, n-1, n$相继递增，故可降阶为$\overbrace{s, \cdots, s}^{2k+2s-2n-5}, a_{k-1}, a_k$；同理，当$a-s=s-1$时，可降阶为$\overbrace{a, \cdots, a}^{k+s-n-3}, a_{k-1}, a_k$．

②．若$a-n+k-3 < n-k+2$．这时不妨设$a_i \leqslant 2n-2.(i=k-1, k)$，（否则可降价）．设$h = (n-k+2)-(a-n+k-3)$

i） 当$h=1$时，令

$$a_k = [n-k+2, a_k-n+k-2] \tag{2}$$

在分解式（1）和（2）中出现了相继递减数列$n, n-1, \cdots, a-n$，最多有a_{k-1}和$a_k-n+k-2$没有分解，当然成立．

ii） 当$h=2$时，令

$$\begin{cases} a_{k-1} = [n-k+1, a_{k-1}-n+k-1] \\ a_k = [n-k+2, a_k-n+k-2] \end{cases} \tag{3}$$

这时在分解式（1）和（3）中出现了相继递减数列$n, n-1, \cdots, a-n$，最多有$a_{k-1}-n+k-1$和$a_k-n+k-2$没有分解，当然成立．

iii） 当$h=3$时，令

$$\begin{cases} a_k = [n, a_k-n] \\ a = [n-i, a-(n-i)], i = 1, 2, \cdots, k-2 \\ a_{k-1} = [n-k+1, a_{k-1}-n+k-1] \end{cases} \tag{4}$$

当$h=4$时，令

$$\begin{cases} a_k = [n, a_k - n] \\ a_{k-1} = [n-1, a_{k-1} - n + 1] \\ a = [n-i, a-(n-i)], i = 2, 3, \cdots, k-1. \end{cases} \quad (5)$$

类似于i）和ii）的讨论，在分解式（4）和（5）中都至多剩下两个数的分拆，当然成立．

iv）当$h \geqslant 5$时，在（5）中，若$a_k - n < a - n + 2$，则只剩下$a_{k-1} - n + 1$的分解,当然成立．若$a_k - n \geqslant a - n + 2$，重作分解：

当$a_k = 2r + 1$时，令

$$\begin{cases} a_k = [r, r+1] \\ a_{k-1} = [n, a_{k-1} - n] \\ a = [n-i, a-n+i], i = 1, 2, \cdots, k-2. \end{cases} \quad (6)$$

在（6）中，必存在i_0，使$n - i_0 = r + 1$，则对$i = i_0$和$i = i_0 + 1$对应的分解式改为$a = [n-k+1, a-n+k-1]$和$a = [n-k, a-n+k]$，这时只剩下$a_{k-1} - n$的分解，当然成立．

当$a_k = 2r$时，令

$$\begin{cases} a_k = [r-1, r+1] \\ a_{k-1} = [n, a_{k-1} - n] \\ a = [n-i, a-n+i], i = 1, 2, \cdots, k-2. \end{cases} \quad (7)$$

在（7）中，必存在i_0使$n - i_0 = r + 1$，则对$i = i_0$和$i = i_0 + 2$对应的分解式改为$a = [n-k+1, a-n+k-1]$和$a = [n-k, a-n+k]$，只剩下$a_{k-1} - n$的分解，当然成立．

情况3　若$a \geqslant 2n$

①．当$a = 2n + 2s$时,（$s \geqslant 0$），则$\overbrace{a, \cdots, a}^{k-2}, a_{k-1}, a_k \to \overbrace{n+s, \cdots, n+s}^{2(k-2)}$，$a_{k-1}, a_k$，可归结为情况2.

②．当$a = 2n + 2s + 1$时，（$s \geqslant 0$），作分解

$$a = [n-i, s+i, n-k-i+2, s+k+i-1], \quad i = 0, 1, \cdots, k-3. \quad (8)$$

若$n - 2k + 5 \leqslant s + 2k - 4$，可得$a - 2n + 2k - 5 > n - 2k + 4$，（8）式改为$a = [n-i, n-2k+i+5, a-2n+2k-5]$，$i = 0, 1, \cdots, k-3$．从而可降阶为$\overbrace{a-2n+2k-5, \cdots, a-2n+2k-5}^{k-2}$，$a_{k-1}, a_k$，定理成立．

若$n - 2k + 5 > s + 2k - 4$，令$(n - 2k + 4) - (s + 2k - 4) = h$．当$h = 0$时，令$a_k = [s+k-2, a_k - s - k + 2]$，与（8）一起出现了相继序列，最多只剩下$a_{k-1}$和$a_k - s - k + 2$的分解，当然成立．

同理，当$h = 1$时，令

$$\begin{cases} a_k = [s+k-2, a_k - s - k + 2] \\ a_{k-1} = [n-2k+4, a_{k-1} - n + 2k - 4] \end{cases} \quad (9)$$

当$h = 2$时，作分解

$$\begin{cases} a_k = [n, a_k - n] \\ a = [n-i, s+i, n-k+2-i, s+k+i-1], \quad i = 1, 2, \cdots, k-2. \\ a_{k-1} = [s+k-1, a_{k-1} - s - k + 1] \end{cases} \quad (10)$$

都只剩下两个数的分解，定理成立．

当 $h=3$ 时，不妨设 $a_{k-1}\geqslant a_k$．若 $a_k-n\leqslant s$，作分解

$$\begin{cases} a_k=[n,\ a_k-n] \\ a=[n-i,\ s+i,\ n-k-i+2,\ s+k+i-1],\quad i=1,2,\cdots,k-2. \end{cases} \tag{11}$$

这时只有 a_{k-1} 没有分解，当然成立．

若 $a_k-n\geqslant s+1$，作分解

$$\begin{cases} a_k=[n,\ a_k-n] \\ a_{k-1}=[n-1,\ a_{k-1}-n+1] \\ a=[n-i,\ s+i,\ n-k-i+2,\ s+k+i-1],\quad i=2,3,\cdots,k-1. \\ s+2k-2=[s+k,\ k-2] \end{cases} \tag{12}$$

定理成立．

当 $h\geqslant 4$ 时，若 $a_k\leqslant n+s$，作分解

$$\begin{cases} a_k=[n,\ a_k-n] \\ a=[n-i,\ s+i,\ n-k-i+2,\ s+k+i-1],\quad i=1,2,\cdots,k-2. \end{cases} \tag{13}$$

这时只有 a_{k-1} 没有分解，定理成立．

若 $a_k>n+s$，当 $a_k=2r+1$ 时，在(13)中令 $a_k=[r,r+1]$．当 $a_k=2r$ 时，在(13)中令 $a_k=[r-1,r+1]$．类似于情况2(iv)的讨论，定理成立．

综上所述，定理1成立． ■

2．定理2的证明

对 n 用数学归纳法．$n=2$ 时，显然．假设对小于 n 的自然数成立．对 n，不妨设 $a_1=a_2=\cdots=a_l=a+1$，$a_{l+1}=a_{l+2}=\cdots=a_{k-1}=a\ (1\leqslant l\leqslant k-1)$．分两种情况讨论．

情况 I 若 $a+1\leqslant 2n-2$，作分解

$$\begin{cases} a+1=[n-i,\ (a-n+1)+i],\quad i=0,1,\cdots,l-1. \\ a=[n-l-i,\ (a-n+l)+i],\quad i=0,1,\cdots,k-l-2. \end{cases} \tag{14}$$

①．如果 $a-n-k-2<n-k+1$．将(14)改为分解

$$\begin{cases} a=[n-i,\ a-n+i],\quad i=0,1,\cdots,(k-l-2). \\ a+1=[n+l-k-i+1,\ a-n-l+k+i],\quad i=0,1,\cdots,l-1. \end{cases} \tag{15}$$

这时只剩 a_k 没有分解，定理成立．

②．如果 $a-n-k-2\geqslant n-k+1$，在(14)中，必存在 m，$(n-k+2\leqslant m<n)$，使 $a-m=m$ 或 $a-m=m-1$；$a+1-m=m$ 或 $a+1-m=m-1$．

i）当 $a-m=m$ 时，参照(14)式，易知 $\overbrace{a+1,\cdots,a+1}^{l}$，$\overbrace{a,\cdots,a}^{k-l-1},a_k$ 的分拆可降阶为 $\overbrace{m,\cdots,m}^{2m-2n+2k-3}$，$a-n+l,a_k$ 的分拆．当 $a-m=m-1$ 时，可降阶为 $\overbrace{a,\cdots,a}^{k-n+m-2},a+l-n,a_k$．由定理1和归纳假设，定理2成立．

ii）当 $a+1-m=m$ 时，$a=2m-1$，参照(14)式，易知 $\overbrace{a+1,\cdots,a+1}^{l}$，$\overbrace{a,\cdots,a}^{k-l-1},a_k$ 的分拆可降阶为 $\overbrace{m,\cdots,m}^{k-l-2(n-m+1)}$，$\overbrace{m-1,\cdots,m-1}^{k-l-1},a_k$ 的分拆．当 $a+1-m=m-1$ 时，则可降阶为

$\overbrace{a+1,\cdots,a+1}^{l-(n-m+1)}$，$\overbrace{a,\cdots,a}^{k-l-1}$，$a_k$的分拆．由归纳假设，定理2成立．

情况2 若$a+1\geqslant 2n-1$．

①．当$a+1=2n-1$时，令$a+1=[n,n-1]$，则可降阶为$\overbrace{a+1,\cdots,a+1}^{l-1}$，$\overbrace{a,\cdots,a}^{k-l-1}$，$a_k$的分拆．

②．当$a+1=2n$时，令$a+1=n+n$，则可降阶为$\overbrace{n,\cdots,n}^{k+l-2}$，$\overbrace{n-1,\cdots,n-1}^{k-l-2}$，$a_k$的分拆．

③．当$a+1\geqslant 2n+1$时，令$a=2n+r$．若$r=2s$ $(s\geqslant 0)$，则可降阶为$\overbrace{n+s,\cdots,n+s}^{2(k-1)-l}$，$\overbrace{n+s+1,\cdots,n+s+1}^{l}$，$a_k$的分拆．

若$r=2s+1$ $(s\geqslant 0)$，则可降阶为$\overbrace{n+s,\cdots,n+s}^{k-l-1}$，$\overbrace{n+s+1,\cdots,n+s+1}^{k+l-1}$，$a_k$的分拆．

此时不妨设$n+s+1\leqslant 2n-2$（否则，重复情况2①．②．③各步），从而归结为情况1．由归纳假设，定理2成立．

综上所述，定理2获证． ■

参 考 文 献

[1] Y. Alavi, A. J. Boals, G. Chartrand, P. Erdös, and O. R. Oellermann, The Ascending Subgraph Decomposition Problem, Congr. Numer. 58(1987), 1—7.

On A New Subgraph Deconposition Problem

Ma Kejie (Qufu Normal University)

Chen Huaitang (Linyi Teachers College)

Abstract

A conjecture was posed by Alavi et. al concerning a new kind of subgraph decomposition, that is the ascending subgraph decomposition, as follows: Let $n\geqslant 2$ be an integer and G a union of stars $s_1, s_2, \cdots, s_k$ with sizes $a_1, a_2, \cdots, a_k$, where $n\leqslant a_i\leqslant 2n-2$ and G has size $\sum_{i=1}^{k} a_i=\binom{n+1}{2}$. Then G has an ascending stars decomposition. In this paper we proved that the conjecture is true if one of the following conditions holds:

1. at least $k-2$ numbers in $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ are equal;
2. $\max\{a_i \mid i=1,2,\cdots,k-1\}-\min\{a_i \mid i=1,2,\cdots,k-1\}\leqslant 1$.