第10卷 第4期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol.10 No.4
1990年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov.,1990

关于Krull—Remak—Schmidt—Azumaya定理——模论与范畴论的结合*

陈治中

（北方交通大学，北京）

（一）

关于模的直和分解的Krull—Remak—Schmidt—Azumaya定理是群的直积分解的推广。1909年，MacLagan—Wedderburn（〔32〕）提出了当有限群分解成不可分解群（indecomposable factors）的直积（或直和）时，这种分解在同构意义下的唯一性问题。证明了，如果一个有限群以两种方式分解成不可分群的直积，那么直积因子成对同构。

1911年左右，Remak（〔24〕）证明了直积因子实际上是中心同构的。

Krull（1925）（〔20〕）和Schmidt（1912，1929）（〔25〕，〔26〕）将这一结果推广到容许（admissible）子群满足双链条件的算子群上。

1950年，Azumaya（〔4〕）将上述结果推广到比有限群更一般的群。即自同态环是局部环的不可分解模，得到了著名的唯一分解定理，即：Krull—Remak—Schmidt—Azumaya定理，围绕这一定理讨论模的直和分解成为环论（模论）中极为重要的问题。

本文从模论与范畴论的结合上讨论K—R—S—A定理，并着重探讨M·Harada的商范畴（factor category）方法的基本思想及其在K—R—S—A定理中的应用。

设R是有单位元的结合环，模M总指右R一模。

定理1 （Krull—Remak—Schmidt—Azumaya）：

设$\{M_i\}_{i\in I}$和$\{N_j\}_{j\in J}$是具有局部自同态环的模族（有限或无限）。且M可以两种方式写成：

$$M=\sum_I \oplus M_i \qquad\qquad M=\sum_J \oplus N_J$$

则，（1）存在一个双射$\varphi: I\to J$，使得对于所有的$i\in I$，$M_i\cong N_{\varphi}(i)$，显然$|I|=|J|$.

（2）对于I的有限子集I'，存在J的有限子集，使得

$$M=\sum_{i'\in I'}\oplus N_{\psi}(i')\oplus\sum_{I-I'}\oplus M_i$$

这里ψ是I'到J内的一一映射。使得$\forall i'\in I'$，$N_{\psi}(i')\cong M_i$

（2′）对于I的有限子集I'，存在J的有限子集，使得

* 1987年9月21日收到.

$$M=\sum_{i\in I'}\oplus M_i'\oplus\sum_{J-\psi(I')}\oplus N_j$$

这里ψ同（2），且$M_i\cong N_{\psi}(i)$

（3）M的任意直和项M'或者同构于有限直和$\sum_{i=1}^{n}\oplus M_i$，或者包含一个与$\sum_{i=1}^{n}\oplus M_i$同构的直和项。#

1964年P·Crawley和B·Jonsson（〔7〕）对于一般代数系统建立了唯一分解定理和同构加细定理。其中特别利用了变换性（exchange property）条件。亦即，模（或代数）M说有变换性，如果对于任何模（或代数）G和任何两个直和分解

$$G=M'\oplus N=\sum_{i\in I}\oplus A_i$$

这里$M'\cong M$，存在子模（或子代数）$A_i'\subseteq A_i$，使得

$$G=M'\oplus\sum_{i\in I}A_i'$$

1969年，R·B·Warfield（〔29〕）证明了不可分解模有上述变换性当且仅当它的自同态环是局部环。利用此证明，关于不可分解代数的直和的Crawley—Jonsson定理包含了Azumaya定理，且还有下面的同构加细定理。

定理2 设M可分解成（有限或无限个）不可分解模的直和。使得每个$M_i(i\in I)$是可数生成并且每个M_i的自同态环是局部环。那么M的任何两个直和分解有同构的加细。特别地，如果K是M的子模，那末存在子集$J\subseteq I$，使得K同构于模M_i的直和$(i\in J)$)（〔1,Th 26·5〕)#

上述定理的一个应用有Kaplansky定理（〔19〕)，即:“局部环上的投射模是自由模”。

（二）

1956年M·Atiyah（〔3〕）最早将关于模的K—R—S—A定理推广到范畴中去。他对于满足双链条件的对象，在Abel范畴中证明了Krull—Schmidt定理．并将这一结果应用到层(sheaf)理论中，得到下面的结果。

定理3 设$\mathscr{A}$是下面（i）或（ii）上凝聚层的正合范畴。

（i）完备代数簇

或 （ii）紧复流形

则$\mathscr{A}$中Krull—Schmidt定理成立．#

定理4 设$\mathscr{E}$是下面（i）或（ii）上的向量丛的类

（i）连通完备代数簇

或 （ii）连通紧复流形

则$\mathscr{E}$中Krull—Schmidt 定理成立。 #

1962年，P·Gabriel（〔9〕)在Grothendieck范畴中证明了Azumaya定理（其证明方法与Azumaya相同)，并应用于讨论在局部Noether范畴（即：有Noether生成元集的Grothendieck范畴）中的内射对象．

定理5 一个局部有限型（即：有有限型的生成元集）的Grothendieck范畴是局部Noether的当且仅当内射对象的任何直和还是内射对象。 #

定理 6 局部 Noether 范畴中的任何内射对象可以唯一地写成不可分解内射对象的直和. #

1964 年, E·A·Walker (〔28〕) 利用在Abel 范畴中对于有限直和的Azumaya定理. 证明了: Jónsson 于1945年 (〔14〕) 发现并于后来 (〔15〕, 〔16〕) 证明的关于有限秩 torsion-free Abel 群的一些有趣结果, 可以看作是对象为Abel 群而 morphism 群按另外方式定义的一类 Abel 范畴中对于有限直和的 Azumaya 定理的应用.

H·Bass 在1968年 (〔5〕) 将关于有限直和的Azumaya定理推广到所有幂等元都可分的加法范畴中. 并将这一结果应用于K一理论中.

另一方面, R·B·Warfield·Jr 于1969年 (〔30〕) 也将Crawley—Jonsson (〔7〕) 关于直和分解 (成不可分解对象的直和) 的一些结果推广到AB5 范畴中. 并以此研究了内射模的结构.

定理 7 AB5 范畴中的内射对象的任何两个直和分解有同构的加细。#

其直接推论是: 内射模的任何两个直和分解有同构的加细.

考虑到Abel 群理论方面的一些最新工作实质上是利用加法范畴而不是Abel 范畴中的唯一分解定理和同构加细定理. 例如, Warfield 关于分配赋值环上模的分类理论 (〔31〕), 就利用了Azumaya定理的翻版, 但不是在模范畴中, 而是在结合的加法非Abel 范畴中. 其困难之处表现在一些关键之处的证明往往不能直接由Abel 范畴的情形照搬过来.

1976年C·L·Walker 和R·B·Warfield·Jr (〔27〕) 证明了在任意加法范畴中. 对于有限直和的Krull—Schmidt 定理, 从而推广了Bass 的一些结果. 并且在有无限直和与有核的加法范畴中, 证明了对于无限直和的唯一分解定理和同构加细定理.

1980年, D·Arnold, R·Hunter 和F·Richman (〔2〕) 证明了在一个有核、有无限直和并且满足弱Grothendieck 条件的加法范畴中. 对于自同态环是主理想整环的类, Azumaya 定理成立。并称为整体 Azumaya 定理, 关于弱 Grothendieck 条件的定义为:

定义 加法范畴说是满足弱Grothendieck 条件, 如果A 是$\sum\limits_{I} C_i$ 的非零子对象, 那么存在 I 的有限子集 J, 使得 $A\cap \sum\limits_{J} C_i \neq 0$.

(三)

1970年左右开始, M·Harada 及其学生 (〔10〕, 〔11〕, 〔12〕, 〔13〕, 〔18〕, 〔34〕, 〔36〕, 〔37〕) 利用商范畴 (factor category) 对K—R—S—A 定理进行的全面讨论, 是具有创造性的工作, 由此可得到一系列实质性的结果。现在来探讨这一理论的基本思想。

首先回到 (一) 中的K—R—S—A 定理, 考虑下面三个推广的条件:

(K—R—S—A—1): 同定理 1 中 (1),

(K—R—S—A—2): 定理 1 之 (2) 与 (2′) 中, 当I' 为任意 (有限或无限) 子集;

(K—R—S—A—3): 若M′ 是M的任意直和项, 则$M' \cong \sum \oplus M_i$.

一般说来, (K—R—S—A—2) 和 (K—R—S—A—3) 并不总是成立的 (见〔7〕, p817).

因为在加法范畴中的全体射的集合恰好与环满足同样的条件. 这样, 环论研究的方法可以用到范畴的研究中, 反过来对范畴进行研究的结果也可用于环论中.

具体看看K—R—S—A 条件, 如果上述 $\{M_i\}_I$ 是一族单模, 那么三个条件显然都能成

立. 而单模的一个重要性质是其自同态环是除环. 现在每个M_i是自同态环为局部环的模，也就是说，对于每个M_i，$End(M_i)/J(End(M_i))$是除环. 两者结合起来考虑，如果在自同态映射中把Jacobson根模掉，那么M_i就可认为与单模有类似的性质. 但是，一般地对于有局部自同态环的不可分解模M_i，$End(M_i)/J(End(M_i))$对M_i或$M_i/J(M_i)$的作用不能定义. 这就考虑到了范畴，因为范畴的射不是把元素对应到元素（对象甚至可以不是集合，这样元素的对应并没有意义），而是给出了从对象到对象的方向. 这就可以来定义和讨论商范畴.

定义 设$\mathscr{B}$是加法范畴$\mathscr{A}$的射集的子类，如果满足

（i）$\forall f\in Mor(\mathscr{A})$ 和$g\in\mathscr{B}$. 如果gf有意义，则$gf\in\mathscr{B}$；

（ii）$\forall fg\in\mathscr{B}$，如果$f\pm g$有意义，则$f\pm g\in\mathscr{B}$，则称$\mathscr{B}$是$\mathscr{A}$的右理想. 同样可定义左理想和双侧理想.

定义 理想j是$\mathscr{A}$的Jacobson根，如果对于每个对象A，$j\cap \mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(A,A)$是$\mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(A,A)$作为环的Jacobson根.

定义 加法范畴$\mathscr{A}$关于理想$\mathscr{B}$的商范畴$\mathscr{A}/\mathscr{B}$是指：

（i）$\mathscr{A}/\mathscr{B}$的对象与$\mathscr{A}$一致（记A在$\mathscr{A}/\mathscr{B}$中为$\overline{A}$）；

（ii）$\mathrm{Mor}_{\mathscr{A}/\mathscr{B}}(\overline{A},\overline{B})=\mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(A,B)/\mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}(A,B)\cap\mathscr{B}$.

设$\{M_\alpha\}_I$是一族有局部自同态环的不可分解模. $\mathscr{A}$是由$\{M_\alpha\}_I$导出的R—模范畴$\mathscr{M}_R$的满子范畴.

一般地，关于无限直和的模$M=\sum\limits_I\oplus M_\alpha$，$N=\sum\limits_J\oplus N_\beta$，$\mathrm{Hom}_R(M,N)$，可用以$\mathrm{Hom}_R(M_\alpha,M_\beta)$为成分的列可加矩阵来表示. 亦即，若$\mathrm{Hom}_R(M,N)$从左边作用，则对于$M_\alpha$的元$x$，使得$f_{\beta\alpha}\in\mathrm{Hom}_R(M_\alpha,N_\beta)$，$f_{\beta\alpha}(x)=0$的$\beta$只有有限多个，即$\sum\limits_\beta f_{\beta\alpha}$为$\mathrm{Hom}_R(M_\alpha,N)$的元. 如果$M=N$，定义

$$j'=\{(f_{\beta\alpha})\mid\in End(M);\ f_{\beta\alpha}\text{ 非同构}\}$$

可以证明j'与M的直和分解形式并无关系. j'是$\mathscr{A}$的理想.

显然，如果M是与有限个M_α的直和同构，则$j'\cap\mathrm{Mor}(M,M)=J(End(M))$，一般地$j'\cap\mathrm{Mor}(M,M)\supsetneqq J(End(M))$.

定理8（[10]）设$\{M_\alpha\}_I$是一族有局部自同态环的不可分解模. $\mathscr{A}$，j'如上，则：$\mathscr{A}/j'$是完全可约Grothendiek范畴. #

由此定理可以看到，$\mathscr{A}/j'$恰与半单模的集合一样，作成半单Grothendieck范畴. 这样就可以证明著名的K—R—S—A定理.（见定理1）.

这里要指出，我们定义的商范畴$\mathscr{A}/j'$与$\mathscr{A}$的对象相同，若在$\mathscr{A}$中$M=\sum\limits_I\oplus M_\alpha$，则在$\mathscr{A}/j'$中为$\overline{M}=\sum\limits_I\oplus\overline{M}_\alpha$. 前者是$R$—模的直和，而后者只是加法范畴中直和，$\overline{M}_\alpha$只是对象，模的性质已消失殆尽. 但$\mathscr{A}/j'$表现了与向量空间相似的样子.

利用商范畴不仅仅是简单地证明K—R—S—A定理，更主要的是在证明过程中，实际上可以看到使得上述定理推广的所谓K—R—S—A条件全面成立的充要条件. 具体来说就是使（K—R—S—A—2）成立的充要条件. 因为（K—R—S—A—1）成立上面已证，而只要（K—R—S—A—2）成立（K—R—S—A—3）亦成立，下面的结果揭示了

K—R—S—A条件的本质.

定理9 ([10]) K—R—S—A条件全部成立当且仅当$j'=j$ (Jacobson根). 亦即当且仅当$j'\cap \mathrm{Mor}(M,M)=J(\mathrm{End}_k(M))$. #

证明从略. 实际上在K—R—S—A定理的证明过程中可以看到. 关键是要使商范畴$\mathscr{A}/j'$里得到的一套结果(关于K—R—S—A条件)可以照样回到原来的范畴$\mathscr{A}$中, 这只是当$j'=j$时才能做到。

这一结果是实质性的, 由此可知, 只需研究j'在什么情况下恰为Jacobson根j, 那么K—R—S—A条件然自然满足.

现在假设$\{M_\alpha\}_I$与$\mathscr{A}$如上, 对于$\mathscr{A}$的理想$\mathscr{B}$, 取$\{M_\alpha\}_I$的任意可数无限子集$\{M_{\alpha_i}\}_{i=1}^{\infty}$考虑其射集合$\{f_i: M_{\alpha_i}\to M_{\alpha_{i+1}} \mid f_i\in\mathscr{B}\}$. 如果对于$M_{\alpha_i}$的任意元$m$, 都存在自然数$n$, 使得$f_nf_{n-1}\cdots\cdots f_1(m)=0$, 那么称$\{M_\alpha\}_I$为关于$\mathscr{B}$的局部半T—幂零系.

假定以与$\{M_\alpha\}_I$同构的模为成分, 关于任意可数无限集$\{M_i\}_{i=1}^{\infty}$, 上述条件满足则称$\{M_\alpha\}_I$为局部T—幂零系.

若上述n与m无关, 则分别称为半T——幂零系与T——幂零系.

以上概念显然是幂零元概念的推广, 下面的定理是重要的.

定理10 所有记号如上, 下面条件互相等价

(1) (K—R—S—A—2) 成立;

(2) $\{M_\alpha\}_I$是关于j'的局部半T—幂零系;

(3) $j'\cap \mathrm{End}_R(M)=J(\mathrm{End}(M))$. #

这样利用商范畴的概念不仅证明了Krull—Remak—Schmidt—Azumaya定理, 而且从本质上进行了推广. 特别是(K—R—S—A—2)与$j'=j$的关系, 在目前情况下, 用纯粹环论的方法还很难证明, 因为这必需导入至今在环论中不需要的新概念.

(四)

关于K—R—S—A定理的Matlis问题是指1958年E·Matlis提出的如下问题([21]): 如果M可写成不可分解内射模的直和, 问M的任何直和项是否还是与这些不可分解内射模同构的一些不可分解内射模的直和.

Matlis证明若R是Noether环时, 这是对的.

1967年C·Faith和E·A·Walker证明([8]), 如果M还是内射模, 则回答是肯定的.

1971年U·S·Kahlon([17])证明, 如果M是拟内射模, 这也是对的.

上面都是用纯粹环论方法证明的. 利用商范畴还可以得到进一步的结果.

定理11 ([37]) 若M的自同态环是幂等元可以提升的von Neumann正则环, 则Matlis问题有肯定回答. #

由此还可以得到, 如果M是有(子模)扩张性(extending property)的直内射模, Matlis问题也有肯定的回答. 这里直内射模和扩张性的定义如下:

定义 ([12]) 模M说有(子模)扩张性, 如果对于M的任何子模N, 总存在M的直和项N^*, N^*是N的本质扩张.

定义 模M说是直内射模, 如果对于给定的M的直和项N, 以及对于包含映射i_N: $N\to$

M与给定的单同态$g: N\to M$，总存在M的自同态映射f，使得：$fg=i_N$.

直内射模的概念显然是（拟）内射模概念的推广．在〔6〕和〔35〕中讨论了它们的一些性质．

另一方面，Yamagata 在1973年（〔33〕）根据定理10的局部半T—幂零性，也给出了Matlis 问题的一个回答．

定理12 下面条件互相等价

（1）环R满足不可约（irreducible）右理想的升链条件。

（2）环R满足本质不可约右理想的升链条件．

（3）Matlis 问题有肯定回答． #

参 考 文 献

〔1〕F. Anderson and K. Fuller, Rings and Categories of Modules, Springer-Verlag, New York, 1974.

〔2〕D. Arrold, R. Hunter and F. Richman, Global Azumaya theorem in additive categories, J. Pure Appl. Algebra, 16(1980), 223-242.

〔3〕M. Atiyah, On the Krull-Schmidt theorem, with application to sheaves, Bull. Soc. Math. Fr., 84(1956) 307-317.

〔4〕G. Azumaya, Corrections and Supplementarics to my paper concerning Krull-Remak-Schmidt's theorem, Nagoya Math. J., 1 (1950) 117-124.

〔5〕H. Bass. Algebraic K-theory, W. A. Benjamin, Inc. New York, 1968.

〔6〕Y. Chae and J. Kwon: On direct injective modules, Kyungpook Math. J, 20(1980). 189-191.

〔7〕P. Crawley and B. Jónsson, Refinements for infinite direct decompositions of algebraic systems, Pac. J. Math., 14(1964) 797-855.

〔8〕C. Faith and E. A. Walker, Direct sum representations of injective modules, J. Algebra, 5(1967) 203-221.

〔9〕P. Gabriel, Des categories abeliennes, Bull. Soc. Math. Fr., 90(1962) 323-448.

〔10〕M. Harada and Y. Sai, On categories of indecomposable modules. I, Osaka J. Math., 7 (1970) 323-344.

〔11〕M. Harada, On categories of indecomposable modules II, Osaka J, Math., 8 (1971) 309-321.

〔12〕M. Harada, Modules with the extending property, Osaka J. Math., 19(1982) 203-215.

〔13〕M. Harada, Factor Categories with Applications to Direct Decomposition of Modules, Lect. Notes in pure and Appl. Math., 88, Marcel Dekker, (1983).

〔14〕B. Jónsson, On unique factorization problem for torsion-free Abelian groups, Bull. Amer Math. Soc., 51(1945) 364.

〔15〕B. Jónsson, On direct decomposition of torsionfree Abelian groups, Math. Scand., 5 (1957) 230-235.

〔16〕B. Jónsson, On direct decomposition of torsionfree Abelian groups, Math. Scand., 7 (1959) 351-371.

〔17〕U. S. Kahlon, Problem of Krull-Schmidt-Remak-Azumaya-Matlis, J. Indian Math, Soc., 3 (1971) 255-261.

〔18〕H. Kanbara, Note on Krull-Remak-Schmidt-Azumaya's theorem. Osaka J. Math., 9(1972) 409-413.

〔19〕I. Kaplansky, Projective. Modules, Ann. Math., 68(1958) 372-377.

〔20〕W. Krull, Uber verall gemeinerte endliche Abelische Gruppen, Math. Zeit., 23(1952) 161-196.
〔21〕E. Matlis, Injective modules overnoetherian rings, Pac, J. Math., 8(1958), 511-528.
〔22〕W. K. Nicholson, Semiregular modules and rigns, Can. J. Math., Vol, XXVIII, 5 (1976) 1105-1120.
〔23〕N. Popescu, Abelian Categories with Applications to Rings and Modules, Academic Press, New York, 1973.
〔24〕R. Remak, Uber die Zerlegung der endlichen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren, J, Reine Angew. Math., 139 (1911) 293-308.
〔25〕O. Schmidt. Uber die Zerlegung endlicher Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren, Univ, Izvestija, (Kiew, 1912).
〔26〕O. Schmidt, Uber unendliche Gruppen mit endlicher Kette, Math, Zeit., 29(1929) 34-41.
〔27〕C. L. Walker and R. B. Warfield Jr, Unique Decomposation and isomorphic refinement theorems in additive categories, J. Pure Appl, Algebra 7 (1976) 347-359.
〔28〕E. A. Walker, Quotient categories and quasiisomorphisms of Abelian groups, in: Proc colloquium on Abelian Groups, Tihany (Hungary), Sept, 1963 (Publ, House of the Hung. Acad, of Sciences, Budapest, 1964) 147-162.
〔29〕R. B. Warfield Jr. A Krull-Schmidt theorem for infinite sums of modules, Proc, Amer, Math, Soc., 22(1969) 460-465.
〔30〕R. B. Warfirld Jr., Decompositions of injective modules, Pac.J.Math., 31(1969) 236-276.
〔31〕R. B. Warfield Jr., Classification theorems for p-groups and modules over a discrete valuation ring, Bull, Amer, Math, Soc:, 78(1972) 88-92.
〔32〕J. H. MaoLagan-Wedderburn, On the direct product in the theory of finite groups. Ann, Math., 10(1909) 173-176.
〔33〕K. Yamagata, A note on a problem of Matlis, Proc, Japan, Acad., 49(1973), 145-147.
〔34〕陈治中, Factor category およびその環論への応用について, 1982, 大阪市立大学.
〔35〕陈治中, 直内射模的刻划, 北方交通大学学报, 1986年第4期, 72—75.
〔36〕陈治中, Auel 范畴的Jacobson根, 北方交通大学学报, 1987年第3期. 95—98.
〔37〕陈治中, 关于Krull—Schmidt 定理的Matlis问题, 科学通报, 1988年第7期 491—493.