第10卷 第4期
1990年11月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.10 No.4
Nov., 1990

# 关于GB型空间的若干结果*

何海燕

（韶关教育学院，广东）

本文对GB型空间进行了若干讨论，得到了一些结果.

设$X$为Banach空间，$X^*$为$X$的共轭空间，$B(X, X)$为$X$到$X$的所有有界线性算子组成的空间．如果$X^*$中的弱$^*$收敛序列为弱收敛序列，则称$X$为GB型空间．Grothendieck. A[1]于1953年证明了$l^\infty$是GB型空间．显然自反空间是GB型空间．

下面定理给出了Banach空间为GB型空间的一个判别准则．

**定理1** Banach空间$X$是GB型空间的充分必要条件是$\forall\{A_n\}\subset B(X, X)$，如$A_n\xrightarrow{w}0$，$(n\to\infty)$则$A_n^*\xrightarrow{w}0$，$(n\to\infty)$．

**证明** "$\Rightarrow$" $\forall f\in X^*$，因为$A_n\xrightarrow{W}0$．$(n\to\infty)$，故$A_n^*f(x)=f(A_nx)\to 0$，$(n\to\infty)$，对$\forall x\in X$．即$A_n^*f\xrightarrow{W^*}0$，$(n\to\infty)$，由于$X$为GB型空间，所以$A_n^*f\xrightarrow{W}0$，$(n\to\infty)$，即$A_n^*\xrightarrow{W}0$，$(n\to\infty)$．

"$\Leftarrow$" 如$X$非GB型，则$\exists\{f_n\}\subset X^*$，$x_0^{**}\in X^{**}$，$\varepsilon_0>0$，使得$f_n\xrightarrow{W^*}0$，$(n\to\infty)$，但$|x_0^{**}(f_n)|>\varepsilon_0$，$n=1,2,\cdots$，取$x_0\in X$，$f_0\in X^*$，使得$f_0(x_0)=1$．对$\forall$自然数$n$，作算子$A_n$: $X\to X$为$A_nx=f_n(x)x_0$，$\forall x\in X$，显然$A_n\in B(X, X)$，且$A_n\xrightarrow{W}0$，$(n\to\infty)$，另一方面，因为$(A_n^*f_0)(x)=f_0(A_nx)=f_n(x)$，所以$A_n^*f_0=f_n$，$|x_0^{**}(A_n^*f_0)|=|x_0^{**}(f_n)|>\varepsilon_0$，这与$A_n^*\xrightarrow{W}0$，$(n\to\infty)$矛盾，故$X$为GB型空间． ■

关于GB型空间的乘积空间及商空间，我们有下面两个定理．

**定理2** GB型空间的$l_p(p>1)$乘积空间是GB型空间．

**证明** 设$X_i$ $(i=1,2,\cdots)$是GB型空间，$X=(\prod_{i=1}^{\infty}X_i)_{l_p}$，则由[2] p.122知$X^*=(\prod_{i=1}^{\infty}X_i^*)_{l_q}$，$X^{**}=(\prod_{i=1}^{\infty}X_i^{**})_{l_p}$，其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$．

设$\forall\{f_n\}=\{(f_n^1, f_n^2,\cdots, f_n^i,\cdots)\}\subset X^*$，$f_n\xrightarrow{W^*}0$，$(n\to\infty)$，其中$\{f_n^i\}\subset X_i^*$，则易得$f_n^i\xrightarrow{W^*}0$，$(n\to\infty)$，且由共鸣定理知$\exists M>0$，使$\|f_n\|<M$，$(n\geq 1)$，因此，由$X_i$为GB型知$f_n^i\xrightarrow{W}0$，$(n\to\infty)$．

设$\forall F=(F_1, F_2,\cdots,F_i,\cdots)\in X^{**}$，$F_i\in X_i^{**}$，则对$\forall\varepsilon>0$，存在自然数$k$，使得$(\sum_{i=k+1}^{\infty}\|F_i\|^p)^{\frac{1}{p}}$

* 1987年11月20日收到，1990年4月20日修改稿．

$<\frac{\varepsilon}{2M}$，又 $f_n^i \xrightarrow{W} 0, (n\to\infty)$．对 $i=1,2,\cdots,k$，存在自然数 $N$，当 $n>N$ 时，有 $|F_i(f_n^i)|<\frac{\varepsilon}{2k}$，$(i=1,2,\cdots,k)$，即 $|F(f_n)|=|\sum_{i=1}^{\infty}F_i(f_n^i)<\sum_{i=1}^{k}|F_i(f_n^i)|+\sum_{i=k+1}^{\infty}|F_i(f_n^i)|<\varepsilon$，所以 $F(f_n)\to 0$，$(n\to\infty)$，即 $f_n \xrightarrow{W} 0, (n\to\infty)$，故 $X$ 是GB型空间． ■

**定理 3** 设 $M$，$X/M$ 是GB型空间，且 $X$ 具有弱紧扩张性，则 $X$ 为GB型空间．

**证明** $\forall \mu\in B(X, c_0)$，由 $M$ 为GB型空间，知 $\mu$ 在 $M$ 上的限制 $\mu|_M$ 为弱紧算子（[3]p.246），由 $X$ 具有弱紧扩张性，存在弱紧算子 $\mu_0\in B(X, c_0)$，使 $\mu_0|_M=\mu|_M$，令 $\mu_1=\mu-\mu_0$，则 $N(\mu_1)\supset M$．（其中 $N(\mu_1)$ 为 $\mu_1$ 的零空间），令 $V$：$X/M\to c_0$ 为 $V(x+M)=\mu_1(x)$，由 $N(\mu_1\supset M$ 知 $V$ 有定义，且 $\mu_1=V\cdot\tau$（其中 $\tau$：$X\to X/M$ 为典则映射），因此，$V$ 连续（[3]p.78），因 $X/M$ 为GB型，所以 $V$ 为弱紧算子，易证 $\mu_1$ 也弱紧，从而 $\mu$ 弱紧，因此 $X$ 是GB型空间，（[3]p.246） ■

下面再对GB型空间的结构作一些讨论．

**定理 4** 非自反的GB型空间的共轭空间必含 $l_1$ 副本．

**证明** 设 $X$ 是GB型空间，由［3］p.139知（$X^*, W^*$）是序列完备的，因 $X$ 是GB型空间，易证（$X^*, W$）和（$X^*, W^*$）具有相同的Cauchy列，因此（$X^*, W$）是序列完备的．由 $X^*$ 非自反，知 $X^*$ 的单位球非弱序列紧，因此 $\exists\{f_n\}\subset X^*$，$\|f_n\|<1$，使 $\{f_n\}$ 无弱收敛子列，又因（$X^*, W$）序列完备，所以 $\{f_n\}$ 无弱Cauchy子列．根据［4］p.99知 $\{f_n\}$ 存在子列 $\{f_{n_i}\}$ 与 $l_1$ 的单位向量基等价，令 $M=\mathrm{span}\{f_{n_i}\}$，则 $M$ 与 $l_1$ 线性同胚，故 $X^*$ 含 $l_1$ 副本． ■

**引理**[5] 设 $X$ 为Banach空间，$X^*$ 存在闭子空间，在其中无 $W^*$ 收敛于0的规范化序列，则 $X$ 含 $l_1$ 副本．

由此引理，我们可以得到

**定理 5** 不含 $l_1$ 副本的GB型空间必自反．

**证明** 设 $X$ 是不含 $l_1$ 副本的GB型空间。如 $X$ 非自反，则由定理4，$X^*$ 有闭子空间 $M$ 线性同胚 $l_1$，设 $T$：$M\to l_1$ 为线性同胚映射．

如存在 $\{x_n^*\}\subset M$，$\|x_n^*\|=1$ 使 $x_n^*\xrightarrow{W^*}0, (n\to\infty)$，则由 $X$ 为GB型空间得 $x_n^*\xrightarrow{W}0, (n\to\infty)$，所以 $Tx_n^*\xrightarrow{W}0, (n\to\infty)$，（［3］p.165）．由 $l_1$ 为shur空间，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|Tx_n^*\|=0$，即 $x_n^*=T^{-1}(Tx_n)$ $\xrightarrow{\|\cdot\|}0, (n\to\infty)$，这与 $\|x_n^*\|=1, (n=1,2,\cdots)$ 矛盾，所以 $M$ 无 $W^*$ 收敛于0的规范化序列，根据引理，$X$ 含 $l_1$ 副本，矛盾，因此 $X$ 自反． ■

上述可得推论：

**推论 1** 设 $X$ 是GB空间，则 $X^*$ 存在一个无穷维的GB型商空间．

**证明** 如 $X$ 自反，则显然；如 $X$ 非自反，则由定理5，$X$ 含 $l_1$ 副本 $M$，因此 $X^*/M^{\perp}\cong M^*\cong(l_1)^*=l^{\infty}$，故 $X^*/M$ 定为GB型空间．

**推论 2** 设 $X$ 是GB型空间，如 $X^{**}/X$ 自反或可分，则 $X$ 自反．

**证明** 如 $X^{**}/X$ 自反，则由［6］，$X$ 不含 $l_1$ 副本，由定理5知 $X$ 自反．如 $X^{**}/X$ 可分，则 $X^*$ 具有RN性质（［7］），从而 $X$ 不含 $l_1$ 副本，所以由 $X$ 为GB型知 $X$ 自反． ■

最后，我们给出GB型空间与OP型空间和shuv空间的一个关系．

**定理 6** GB型空间的共轭空间为OP型空间，无穷维GB型空间的共轭空间一定不是shur

空间.

**证明** 设$X$为GB型空间，如$X^*$含$c_0$副本，则由[4]p.103知$X$含$l_1$的可余副本$M$，由[3]p.245知$M$为GB型空间，从而$l_1$为GB型空间，矛盾，故$X^*$为OP型空间.

由[8]知$X^*$中存在$\{f_n\}$，$\|f_n\|=1,(n=1,2,\cdots)$，使$f_n\xrightarrow{W^*}0,(n\to\infty)$，如果$X$为GB型空间，那么$f_n\xrightarrow{W}0,(n\to\infty)$，但$\|f_n\|=1,(n=1,2,\cdots)$，故$X^*$不是shur空间. ∎

**注** 显然，$X^*$为GB型空间$\not\Rightarrow X$为GB型空间，如$X=l_1$. 反之，$X$为GB型空间$\not\Rightarrow X^*$为GB型空间，例如$X=l^\infty$，因为$X^{**}\supset l^\infty\supset c_0$，由定理6，$X^*=bfa(N)$不是GB型的.

## 参 考 文 献


[1] Grothendieck.A, CJM, Vol.5(1953), 129—173.

[2] 定光桂，巴拿赫空间引论，科学出版社，(1984).

[3] Wilansky. A, Modern Methods in Topological Vector Spaces (1978).

[4] Lindenstrauss.J, Classical Banach Spaces 1 (1977), Springer-Verlag.

[5] Hagler.J, Israel. J.Math. 28(1977), 325—330.

[6] Clark. J. R, Coreflexive and somewhat reflexive Banach space, Proc. Amer. Math. Soc. 36(1972), 421—427.

[7] Huo. T. H, On conjugate Banach spaces with the RNP, Pacific. J. Math. 59(1975), 497—503.

[8] Josefson. B, Ark. Math, Vol. 13(1975), 78—89.


# On Several Results of GB Type Spaces


*He Haiyan*

(Shaoguan educational college, Guandong)



### Abstract

In this paper, We gave a sufficient and necessary condition of Banach spaces being GB type spaces as well as a conditon for the $l_p$ product space of GB type spaces being a GB type space . In addition, We discussed the structure of GB type spaces. Finally we have proved the relation between GB type spaces and OP type spaces.