第10卷 第4期 数学研究与评论 Vol.10 No.4
1990年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION NoV., 1990

解析算子值函数的Riesz—Dunford积分*

朱健民

（国防科技大学，长沙）

1．引言

设H为复Hilbert空间，$L(H)$表示H上所有连续线性算子组成的Banach空间．若$f(z)$为定义在复平面区域D上的算子值函数，$f(z)\in L(H)$（$z\in D$），我们称$f(z)$于D上解析，是指对$L(H)$上的每个连续线性泛函φ，$\varphi(f(z))$为D上通常的复值解析函数，其全体记为$A_H(D)$．令

$$N_H(D)=\{f(z)\,|\,f\in A_H(D),\ f(z)\cdot f(w)=f(w)\cdot f(z),\ f(z)\cdot f(z)^*=f(z)^*\cdot f(z),\ z,w\in D\}$$

显然，若$f(z)$为D上的复值解析函数，I为$L(H)$中的恒等算子，则$f(z)\cdot I\in N_H(D)$．

〔1〕中将K．Fan关于复值解析函数的Riesz—Dunford积分的一定理推广成：

定理A 设$\Delta=\{|z|<1\}$，$f(z)\in N_H(\Delta)$，$T\in L(H)$，$T\cdot f(z)=f(z)\cdot T$．若$\|f(z)\|<1$，$z\in\Delta$，则当$\|T\|<1$时，有$\|f(T)\|<1$．

其中$f(T)$表示由Riesz—Dunford积分定义的算子

$$f(T)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(z)}{zI-T}\mathrm{d}z$$

Γ为含$\sigma(T)$且在Δ中的正向围道．积分的意义是关于算子范数在Γ上一致收敛．

在证明此定理时，用到了自伴算子单位分解的逼近定理，并且用到了K．Fan的结果．本短文运用函数论的方法得到一定理，由此可推出定理A．

定理 设$\overline{\Delta}=\{|z|\leqslant 1\}$，$f(z)\in N_H(\overline{\Delta})$，$\|f(z)\|<1$，$z\in\overline{\Delta}$．设$T\in L(H)$，$\|T\|<1$，$Tf(z)=f(z)T$，则存在函数序列$\{f^{(k)}(z)\}\subset N_H(\overline{\Delta})$满足

（1）$\|f^{(k)}(z)\|<1$，$z\in\overline{\Delta}$；

（2）$\|f^{(k)}(T)\|<1$；

（3）$f(z)-f^{(k)}(z)=O(z^k)$，即$f(z)-f^{(k)}(z)$至少以$z=0$为k阶零点，其中$k=1,2,\cdots$．以下意义同此．

2．定理的证明及推论

对于$L(H)$中的自伴算子A和B，$A\leqslant B$表示$B-A$为正算子，即$\langle(B-A)x,x\rangle\geqslant 0$对一切$x\in H$成立，$A<B$表示$B-A$为可逆的正算子．

* 1988年11月4日收到．

先给出一简单引理

引理 设$T\in L(H)$，$B\in L(H)$，且B为正规算子，$BT=TB$，$\|T\|<1$，$\|B\|<1$．令

$$C=\frac{T-B}{I-B^*T}$$

则$\|C\|<1$．

〔1〕中有此结论，为完整起见我们给出其证明．

证明 因$\|C\|<1$ 等价于

$$(T^*-B^*)(T-B)<(I-T^*B)(I-B^*T)$$

而
$$(I-T^*B)(I-B^*T)-(T^*-B^*)(T-B)$$
$$=(I-T^*T)(I-B^*B)$$

由于$I-T^*T>0$，$I-B^*B>0$，且$I-T^*T$与$I-B^*B$可换，因此有$(I-T^*T)(I-B^*B)>0$．

引理获证．

现在我们证明定理：

令$f_0(z)=f(z)$，

$$f_n(z)=\frac{1}{z}\frac{f_{n-1}(z)-f_{n-1}(0)}{1-f_{n-1}(0)^*f_{n-1}(z)},\quad n=1,2,\cdots.$$

容易验证$f_n(z)\in N_H(\bar{\Delta})$，$f_n(z)$与$T$可换，且$\|f_n(z)\|<1$．我们仅对$f_1(z)$验证$\|f_1(z)\|<1$，$z\in\bar{\Delta}$，其他归纳可得．

因
$$f_1(z)=\frac{1}{z}\frac{f(z)-f(0)}{1-f(0)^*f(z)}$$

由引理，在$|z|=1$ 上有$\|f_1(z)\|<1$，再由最大模原理〔2,p.100〕有$\|f_1(z)\|<1$，$z\in\bar{\Delta}$．

然后对$\{f_n(z)\}$归纳证明：对每个$f_n(z)$，存在函数序列$\{f_n^{(k)}(z)\}\subset N_H(\bar{\Delta})$使

（i） $\|f_n^{(k)}(z)\|<1$，$z\in\bar{\Delta}$；

（ii） $\|f_n^{(k)}(T)\|<1$；

（iii） $f_n(z)-f_n^{(k)}(z)=O(z^k)$．$k=1,2,\cdots$.

特别有定理成立，因为$f_0(z)=f(z)$

当$k=1$ 时，令

$$f_n^{(1)}(z)=\frac{r_0z+f_n(0)}{1+f_n(0)^*r_0z}\qquad(0<r_0<1)$$

则$f_n^{(1)}(z)$满足条件（i）（ii）和（iii），且$f_n(0)$与$f_{n+1}^{(1)}(z)$可换，$f_n(z)$与$f_n^{(1)}(z)$可换，因为
$$f_{n+1}^{(1)}(z)=\frac{r_0z+f_{n+1}(0)}{1+f_{n+1}(0)^*r_0z}$$

而$f_n(0)$与$f_{n+1}(0)$可换．$f_n^{(1)}(z)\in N_H(\bar{\Delta})$是显然的．

假设对所有的n，存在$f_n^{(k)}(z)\in N_H(\bar{\Delta})$，$f_n(0)$与$f_{n+1}^{(k)}(z)$可换，$f_n(z)$与$f_n^{(k)}(z)$可换，且满足条件（i）（ii）和（iii）．令

$$f_n^{(k+1)}(z)=\frac{zf_{n+1}^{(k)}(z)+f_n(0)}{1+f_n(0)^*zf_{n+1}^{(k)}(z)}$$

由归纳假设及引理有$\|f_n^{(k+1)}(z)\|<1$，$\|f_n^{(k+1)}(T)\|<1$．又因$f_{n+1}(z)-f_{n+1}^{(k)}(z)=O(z^k)$，所以

$$f_n(z)-f_n^{(k+1)}(z)=\frac{zf_{n+1}(z)+f_n(0)}{1+f_n(0)^*zf_{n+1}(z)}-\frac{zf_{n+1}^{(k)}(z)+f_n(0)}{1+f_n(0)^*zf_{n+1}^{(k)}(z)}$$
$$=\frac{[\,[1-f_n(0)f_n(0)^*]z[f_{n+1}(z)-f_{n+1}^{(k)}(z)]}{[1+f_n(0)^*zf_{n+1}(z)][1+f_n(0)^*zf_{n+1}^{(k)}(z)]}$$
$$=O(z^{k+1})$$

显然有 $f_n(0)$ 与 $f_{n+1}^{(k+1)}(z)$ 可换，$f_n(z)$ 与 $f_n^{(k+1)}(z)$ 可换.

定理获证.

推论 1 对于定理中的 $f(z)$ 和 T，有

$$\lim_{k\to\infty}\|f(T)-f^{(k)}(T)\|=0$$

因此有 $\|f(T)\|\leqslant 1$.

证明 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}B_nz^n$，$f^{(k)}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(k)}z^n$. 由于 $\|f(z)\|<1$，$\|f^{(k)}(z)\|<1$，因此由Cauchy不等式有 $\|B_n\|\leqslant 1$，$\|B_n^{(k)}\|\leqslant 1$. 而由〔1〕知

$$f(T)=\sum_{n=0}^{\infty}B_nT^n;\quad f^{(k)}(T)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(k)}T^n$$

所以，当 $\|T\|<r<1$ 时

$$\|f(T)-f^{(k)}(T)\|\leqslant 2\sum_{n>k}^{\infty}r^n\to 0\qquad(k\to\infty)$$

因此有 $\lim_{k\to\infty}\|f(T)-f^{(k)}(T)\|=0$. 又因 $\|f^{(k)}(T)\|<1\ (k=1,2,\cdots)$ 所以 $\|f(T)\|\leqslant 1$.

推论 2 若 $f(z)\in N_H(\Delta)$，$\|f(z)\|<1$，$T\in L(H)$，$Tf(z)=f(z)T$，则当 $\|T\|<1$ 时有 $\|f(T)\|<1$.

此推论即为定理A.

证明 若 $\|T\|<r<\rho<1$，令

$$\max_{|z|=\rho}\|f(z)\|=1-\delta,\quad(0<\delta<1)$$

作函数

$$F(z)=\frac{1}{1-\delta}f(rz)$$

则 $F(z)$ 满足定理条件. 因此，对 $T'=\frac{T}{r}$ 有

$$\|F(T')\|=\frac{1}{1-\delta}\|f(T)\|\leqslant 1$$

所以有 $\|f(T)\|\leqslant 1-\delta<1$.

注：证明的思想来源于函数论中的Carathéodory定理〔3, P.6〕. 另外，我们的证明不依赖于K.Fan的结果.

参 考 文 献

〔1〕Tao Zhiguang, Analytic Operator Function, J. Math. Anal. Appl. 103 (1984), 293—320.
〔2〕E. Hille and R. S. phillips., "Functional Analysis and Semigroup", Rev. Ed., Amer. Math. Soc., Providence, R. I. 1957.

〔3〕J. B. Garnett, "Bounded Analytic Functions", Academic Press, New York, London, 1981.
〔4〕K. Fan, Analytic function of a Proper contraction, Math. Z. 160 (1978), 275—290.

The Riesz—Dunford Integral of Analytic Operator Functions

Zhu Jianmin

(The Institute of National Defence and Technology, Changsha)

Abstract

Let $L(H)$ be the complex Banach space of all continous linear, operators on Hilbert space H and $A_H(D)$ denote all analytic operator functions defined on domain D in the complex plane with values in $L(H)$. Set

$N_H(D) = \{f(z) \mid f \in A_H(D),\ f(z)f(w) = f(w) \cdot f(z),\ f(z)^* f(z) = f(z) f(z)^*,\ z, w \in D\}$.

We obtain a result with method of function theory which may deduce the main theorem in 〔1〕.

Theorem. Let $\bar{\Delta} = \{|z| \leqslant 1\}$, $f(z) \in N_H(\bar{\Delta})$ and $\|f(z)\| < 1$ $(z \in \bar{\Delta})$. Let $T \in L(H)$, $\|T\| < 1$ and $Tf(z) = f(z)T$. Then there exists a sequence of functions $f^{(k)}(z)$ that belong to $N_H(\bar{\Delta})$ and satisfy the following:

(1) $\|f^{(k)}(z)\| < 1$ $(z \in \bar{\Delta})$;

(2) $\|f^{(k)}(T)\| < 1$; and

(3) $f(z) - f^{(k)}(z) = O(z^k)$, i.e., $f(z) - f^{(k)}(z)$ has a zero of at least order k at $z = 0$ where $k = 1, 2, \cdots$.