第10卷 第4期
1990年11月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.10 No.4
Nov., 1990

关于赋范线性空间的λ-性质*

刘 郁 强

（华南师范大学数学系，广州）

本文研究赋范线性空间的 λ-性质[1]，并得到以下的主要结果.

1．闭单位球的λ-点.

设 X 为赋范线性空间，$B_X=\{x;\ \|x\|\leq 1\}$ 和 $\mathrm{ext}(B_X)$ 为 B_X 的全体端点的集合.

设 $x\in B_X$. 若 $e\in\mathrm{ext}(B_X)$，$y\in B_X$，$0<\lambda\leq 1$ 且 $x=\lambda e+(1-\lambda)y$，称 x 为 λ-点，且定义

$$\lambda(x)=\sup\{\lambda\in(0,1];\ \lambda e+(1-\lambda)y=x,\ \text{某 } e\in\mathrm{ext}(B_X),\ y\in B_X\}.$$

若 B_X 的每一点都是 λ-点，则称 X 有 λ-性质. 若 $\inf\{\lambda(x);\ x\in B_X\}>0$，则称 X 有一致 λ-性质.

定理1.1 设开线段 $(a:b)=\{\mu a+(1-\mu)b;\ 0<\mu<1\}\subset B_X$. 则此线段上所有点或者都是 λ-点，或者都是非 λ-点. 在第一种情况下，若

$$x_i=\mu_i a+(1-\mu_i)b,\quad 0<\mu_i<1,\ i=1,2,$$

则

$$\frac{\lambda(x_2)}{\lambda(x_1)}\geq\min\{\frac{\mu_2}{\mu_1},\ \frac{1-\mu_2}{1-\mu_1}\}.$$

定理1.2 若 $\mathrm{ext}(B_X)\neq\phi$，则 $U_X=\{x;\ \|x\|<1\}$ 的所有的点都是 λ-点，并且 $\lambda(x)\geq(1-\|x\|)/2$，$x\in U_X$.

利用定理1.1，可将[1]定理1.15中 X 是无穷维的条件除去：

命题1.3 设 X 为严格凸赋范线性空间，则 $c(X)$ 有一致 λ-性质，且

$$\lambda(x)=(1+m)/2,\quad x=(x_n)\in B_{c(X)},$$

其中 $m=\inf\{\|x_n\|;\ n\geq 1\}$. 此外，若 $\lim\limits_n x_n\neq 0$，则 $\lambda(x)$ 是可达的.

以下命题刻划了 $C[0,1]$ 的单位球的 λ-点和非 λ-点.

命题1.4 设 $X=C[0,1]$，$x=x(t)\in B_X$，则 x 为非 λ-点当且仅当存在 $t_1,t_2\in[0,1]$，使 $x(t_1)=-1$ 和 $x(t_2)=1$.

2．赋范线性空间的λ-指数.

以 D_X 表示 B_X 的全体 λ-点的集合.

引理2.1 设 $x\in B_X\setminus D_X$ 则存在 $(a:b)\subset B_X\setminus D_X$ 使 $x\in(a:b)$，$a\neq b$.

* 1989年11月24日收到. 国家自然科学基金资助课题.

对于一般的赋范线性空间，其单位球上的 λ-函数定义为：

$$\lambda\{x\}=\begin{cases}\sup\{\lambda\in[0,1];\ \lambda e+(1-\lambda)y=x,\ \text{某}\ e\in \mathrm{ext}(B_X),\ y\in B_X\}, & x\in D_X,\\ -\sup\{\|y-x\|/2;\ [y:x]\subset B_X\setminus D_X\}, & x\in B_X\setminus D_X,\end{cases}$$

其中 $[y:x]=\{\mu y+(1-\mu)x;\ 0<\mu<1\}$.

定义 $\lambda(X)=\inf\{\lambda(x);\ x\in S_X\}$，则 $-1<\lambda(X)<1$. 称 $\lambda(X)$ 为赋范线性空间 X 的 λ-指数.

定理2.2

(a) $\lambda(X)=1$ 当且仅当 $\lambda(x)=(1+\|x\|)/2$，$x\in B_X$.

(b) 若 X 是严格凸的，则 $\lambda(X)=1$.

(c) 若 $\lambda(X)=1$，则 $\mathrm{ext}(B_X)$ 在 S_X 中稠密.

(d) $\lambda(X)>0$ 当且仅当 X 有一致 λ-性质.

(e) $\lambda(X)=0$ 当且仅当 X 有 λ-性质但没有一致 λ-性质.

(f) $\lambda(X)<0$ 当且仅当 X 没有 λ-性质. 此时

$$\lambda(X)=-\sup\{\|b-a\|/2;\ [a;b]\subset B_X/D_X\}.$$

(g) 若 $\mathrm{ext}(B_X)=\phi$，则 $\lambda(X)=-1$.

定理2.3 一些赋范线性空间的 λ-指数如下（空间的定义可参看[1]—[5]）：

X:	$\lambda(X)$
$l_p, c_p, nc_p, L_p[0,1]$ $(1<p<\infty)$	1
$l_\infty, nc_\infty, bs, bv, c, cs, L_\infty[0,1]$	1/2
l_1, nc_1, bv_0	0
$c_0, c_0s, L_1[0,1], C[0,1]$	-1

3. λ-性质与维数或可分性的联系.

定理3.1 设 X 为Banach 空间且有 λ-性质.

(a) 若 $\mathrm{ext}(B_X)$ 为有限集，则 X 是有限维的.

(b) 若 $\mathrm{ext}(B_X)$ 为可列集，则 X 是可分的.

参 考 文 献

[1] Richard M. Aron and Robert H. Lohman, A geometric function determined by extreme points of the unit ball of normed space, Pacific Journal of Math., Vol. 127, No.2(1987), 209—231.

[2] A. Wilansky, Summability through Functional Analysis, North Holland, 1984.

[3] Ng Peng-Nung and Lee Peng-Yee, Cesaro sequence space of nonabsolute type, Comm. Math. 20(1978), 429—433.

[4] Gottfried Kothe, Topological vector Space I, New York, 1983.

[5] 张文耀，Cesaro 序列空间的几何性质，华东师范大学学报（自然科学版），1984年第4期.