第11卷 第1期
1991年2月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.1
Feb. 1991

Γ-环与广义Γ-环的拟P根是Amitzur-Курош根

奚 欧 根
（宁波大学数学系）

摘 要

本文证明了Γ-环的拟 p 根和拟强幂零根是Amitzur-Курош根，并给出了Γ-环的拟 P 根根与 P 根相等的条件．最后还证明了这些结果在广义Γ-环中都能成立．

笔者在[1]中证明了Γ-环的强幂零根等于拟强幂零根．众所周知，强幂零根不是Amitzur-Курош根，于是自然要问，拟强幂零根也不是Amitzur-Курош 根吗？因为拟强幂零根是拟 P 根中取 P 为"强幂零"性质时的具体根[1]，所以进一步要问，Γ-环的拟 P 根是不是Amitzur-Курош 根？本文首先回答这个问题．结论是，拟 P 根是Amitzur-Курош 根，因而拟强幂零根自然是Amitzur-Курош 根．其次，本文讨论了在什么条件下，P 根等于拟 P 根（例如强幂零根等于拟强幂零根）．结论是，若环性质 P 是Amitzur-Курош根性质，则任何Γ-环的 P 根等于拟 P 根．若 P 是环性质而不是根性质，但性质 P 是同态闭的，则当Γ-环 M 有 P 根时，P 根必等于拟 P 根．最后还证明了在广义Γ-环[2]中本文诸结果都能成立．因广义Γ-环是结合环的自然推广，因此，本文诸结果在结合环中也全部成立．

§1 拟 P 根与拟强幂零根是Amctzur-Курош根

定义1.1 M 是Γ-环，M^0 是 M 的Γ-扩环，设 $\overline{M}^0$ 是 M^0 的任意一个Γ-同态象：$M^0 \overset{f}{\sim} \overline{M}^0$，如果 $f(M)$ 恒为零，或者，当 $f(M)=\overline{M}\neq\{0\}$ 时，$\overline{M}$ 中必有 $\overline{M}^0$ 的非零的 P 理想，就说 M 为 M^0 的拟 PΓ-子环，简称 M 为拟 PΓ-环．其中 P 是Γ-环的任意的环性质．

定义1.2 设 I 是Γ-环 M 的Γ-单边或双边理想，I 作为Γ-环是 M 的拟 PΓ-子环，则称 I 为 M 的拟 PΓ-理想．

显然，定义1.2与[1]中定义2.1是等价的．

定理1.1 拟 PΓ-环的同态象是拟 PΓ-环．

先证下列引理．

引理1.1 设 I 是Γ-环 M 的Γ-子环，I 同态于 $\overline{I}$：$I \overset{\varphi}{\sim} \overline{I}$．则必存在Γ-环 $\overline{M}$，使得：① $M \overset{f}{\sim} \overline{M}$，② $\overline{I}$ 为 $\overline{M}$ 的Γ-子环，③ $f|_I=\varphi$．

证明 令 $\overline{M}=\overline{I}\cup M\setminus I$，作映射

---

* 1989年3月8日收到．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$f:\ M\to\overline{M}$$
$$a\mapsto\overline{a}=a\ (a\in M\setminus I)$$
$$a\mapsto\overline{a}=\varphi(a)\ (a\in I)$$

易知f为满射，在$\overline{M}$中规定加法：$\forall\overline{a},\overline{b}\in\overline{M}$，设$a,b$分别为$\overline{a},\overline{b}$在$M$中的原象，若在$M$中有$a+b=c$，且$c\overset{f}{\mapsto}\overline{c}$，则规定$\overline{a}\oplus\overline{b}=\overline{c}$，乘法类似规定：$\forall\gamma\in\Gamma$，若$a\gamma b=d$，且$d\mapsto\overline{d}$，则规定$\overline{a}\odot\gamma\odot\overline{b}=\overline{d}$，于是，易知$M\Gamma$-同态于$\overline{M}$：$M\overset{f}{\sim}\overline{M}$，故$(\overline{M},\Gamma,\oplus,\odot)$是$\Gamma$-环，由$f$的作法知$f|_I=\varphi$，再由$I\sim\overline{I}$知$\overline{I}$为$\overline{M}$的$\Gamma$-子环. ■

定理1.1的证明：

设M为拟P Γ-环，因而由定义1.1，它是某扩环M^0的拟P Γ-子环. 设$\overline{M}$是M的一个Γ-同态象：$M\overset{\varphi}{\sim}\overline{M}$，由引理1.1，存在$\overline{M}$的扩环$\overline{M}^0$，使得$M^0\overset{f}{\sim}\overline{M}^0$，$f|_M=\varphi$. 下证$\overline{M}$是$\overline{M}^0$的拟$P$ Γ-子环. 设$\overline{\overline{M}}^0$是$\overline{M}^0$的任一$\Gamma$-同态象：$\overline{M}^0\overset{f'}{\sim}\overline{\overline{M}}^0$，且设$\overline{M}$在$f'$下的象为$\overline{\overline{M}}$，则可断言或$\overline{\overline{M}}=\{0\}$，或$\overline{\overline{M}}$中必有$\overline{\overline{M}}^0$的非零的$P$理想，因而$\overline{M}$是$\overline{M}^0$的拟$P$ Γ-子环. 事实上，由于$M^0\overset{f'f}{\sim}\overline{\overline{M}}^0$，且$\overline{\overline{M}}$是$M$在$f'f$下的象，因$M$是$M^0$的拟$P$ Γ-子环，故知必或$\overline{\overline{M}}=\{0\}$，或在$\overline{\overline{M}}$中存在$\overline{\overline{M}}^0$的非零$P$理想，所以$\overline{M}$是拟$P$ Γ-环. ■

根据[1]中定理2.2就有

定理1.2 任何Γ-环M都有一个拟P根$R(M)$.

根据[1]中定理2.3就有

定理1.3 Γ-环M对于$R(M)$的商$M/R(M)$是拟P半单Γ-环.

由定理1.1，1.2，1.3立得

定理1.4 Γ-环M的拟P根是Amitzur-Курош根.

拟P根中取P为“强幂零”性时，就得

定理1.5 Γ-环M的拟强幂零根是Amitzur-Курош根.

因为[1]中已得“强幂零根＝拟强幂零根”的结论，这就提供了一个十分有趣的事实：一个非Amitzur-Курош根性质定义的根可以等于一个由Amitzur-Курош根性质定义的根.

因为定理1.4中的P是Γ-环的任意一个环性质，故定理1.4还告诉我们，只要任给一个环性质，就可得到一个由根性质定义起来的Amitzur-Курош根.

§2　P根等于拟P根的条件

“强幂零根＝拟强幂零根”是具体的“P根＝拟P根”的一个例子. 但对任意一个环性质P，P根并不一定都等于拟P根.

定理2.1 设P是Γ-环的一个环性质而不是根性质，但性质P是同态闭的，则当Γ-环M有P根时，必有：P根＝拟P根.

先证下列引理：

引理2.1 设P是Γ-环的任一环性质，则P半单Γ-环必是拟P半单Γ-环.

证明 设M是P半单的，且若含非零拟P理想I，因$I\subsetneq\{0\}$，由定义1.2，I在Γ-同态$M\overset{f}{\sim}M/\{0\}$下的象$f(I)=\overline{I}=I$中一定有$M$的非零的$P$理想，此与$M$为$P$半单的假设矛盾，故$M$为拟$P$半单的. ■

引理2.2 设Γ-环的环性质P同态闭，则拟P半单Γ-环必是P半单的.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

证明 若拟P半单Γ-环M不是P半单的，即，M有非零的P理想I，则可证I也是拟P理想．事实上，若$I\subsetneq H$，H为M的Γ-双边理想，因性质P同态闭，故在$M\overset{f}{\sim}M/H$下，P理想I的象$f(I)=\bar{I}$也是M/H的非零的P理想．故I为拟P理想，此与M的拟P半单性相矛盾． ■

定理2.1的证明

设I，I_Q分别为M的P根与拟P根，由引理2.1，P半单的Γ-环M/I也是拟P半单的，故$I_Q\subseteq I$；由引理2.2，因P同态闭，故拟P半单Γ-环M/I_Q也是P半单的，故$I\subseteq I_Q$． ■

由定理2.1可知，由于“强幂零”性质是同态闭的，因此，取P为“强幂零”性质时，由定理2.1立得：Γ-环M存在强幂零根时，强幂零根＝拟强幂零根．

定理2.2 如果P是Γ-环的Amitzur-Курош根性质，则对任何Γ-环，恒有：P根＝拟P根．

证明 既然P是根性质，自然是同态闭的，这就归结为定理2.1． ■

由定理2.2可以得到若干有趣的结果，例如，由于局部强幂零性质是Amitzur-Курош根性质，所以Γ-环的强Levitzki根＝拟强Levitzki根．再如，由于强左拟正则性质是根性质，所以可得：Γ-环的强Jacobson根＝拟强Jacobson根，[7,8]中给出了这两个等式的直接证明．

§3 广义Γ-环的拟P根

在广义Γ-环中，重复§1的讨论可知，诸引理和定理在广义Γ-环中都是成立的，而结合环可以自然地被解释为广义Γ-环[2]，因而§1中诸结果在结合环中自然成立．因而，结合环的拟P根也是Amitzur-Курош根．

同样，由验证知§2的定理2.1，2.2在广义Γ-环中也成立，因而P根等于拟P根的条件在结合环中也同样有效．

参 考 文 献

[1] 奚欧根，数学研究与评论，Vol.8，2(1988)，171—174.

[2] 陈维新，数学研究与评论，4(1984)，4—9.

[3] 刘绍学，环与代数，科学出版社，1983.

[4] Willian E. Coppage and Jiang LUH；J. Math. Soc. Japan, Vol.23, No.1, 1971, 40—52.

[5] Szász, F.A., Radicals of Rings, 1981.

[6] T. S. Ravisankar and U. S. Shukle, Pacitic J. Math., Vol.80, 2(1979), 537—559.

[7] 奚欧根，宁波大学学报(理工版)，Vol.1,2(1988)，1—5.

[8] 奚欧根，Γ-环与广义Γ-环的强Jacobson根与拟强Jacobson根，宁波大学学报(理工版)，Vol.2,1(1989)，1—5.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

The Quasi-P-Radicals of Γ-rings and Generalized Γ-rings Are Amitzur-Курош Radicals

Xi Ougen

(Ningbo University)

Abstract

In this paper, we proved that the quasi-P-radicals and the quasi-strongly nilpotent radicals of Γ-rings are Amitzur-Курош radicals, and gave some conditions for P-radical = quasi-P-radical. In addition, we checked that all of these results are valid in generalized Γ-rings.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.