第11卷 第1期
1991年2月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.1
Feb. 1991

关于矩阵$\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$的$g$-逆中子块的独立性*

陈 永 林
(南京师范大学数学系)

Hall[1]，Hall与Meyer[2]以及Campbell与Meyer[3]等研究了在线性统计估计与等式约束二次规划问题中很有用的"基本加边阵"$F=\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix}$的广义逆，其中$A$为非负定阵. Hall[1]首先指出了$F$的$g$-逆中各子块是互相独立的. Mitra[4]扩充了Hall的结果，证明了了：若矩阵

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

满足秩可加性条件

$$\operatorname{rank} M=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}+\operatorname{rank}\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.1a}$$

$$=\operatorname{rank}(A,B)+\operatorname{rank}(C,0) \tag{2.1b}$$

则M的g-逆

$$G=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & -C_4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

中各子块C_i之间也是互相独立的；并指出：当A为非负定阵时，$F=\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix}$满足秩可加性条件.

另外，党诵诗[5]证明了：若M满足秩可加性条件，则

$$M^+=\begin{pmatrix} Q & (I-QA)C^+ \\ B^+(I-AQ) & -B^+(A-AQA)C^+ \end{pmatrix} \tag{4}$$

其中$Q=[(I-BB^+)A(I-C^+C)]^+$.

本文研究了Mitra[4]与党诵诗[5]的结果的反问题，得到了一个深刻而有趣的结论：

M的g-逆中各子块互相独立，以及M^+的形式如(4)所示，其充要条件均是M满足秩可加性条件.

这个结果揭示了秩可加性条件的重要性与合理性.

本文用T^-表示适合$TT^-T=T$的任一矩阵，即T的g-逆. 两个特殊的记号是$E_T=I-TT^-$，$F_T=I-T^-T$. 关于广义逆矩阵的知识基础参见[3].

引理1([6, Theorem 5 and 19])

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}=\operatorname{rank} AF_C+\operatorname{rank} C=\operatorname{rank} CF_A+\operatorname{rank} A \tag{5a}$$

$$\operatorname{rank}(A,B)=\operatorname{rank} E_BA+\operatorname{rank} B=\operatorname{rank} A+\operatorname{rank} E_AB \tag{5b}$$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}=\operatorname{rank} B+\operatorname{rank} C+\operatorname{rank} E_BAF_C \tag{5c}$$

1989年3月16日收到. 国家自然科学基金资助项目.

引理 2 设M如(1)．则秩可加性条件(2.1a，b)等价于下列每个条件：

(i) $$\operatorname{rank}(AF_C,\ B)=\operatorname{rank}AF_C+\operatorname{rank}B \tag{2.2a}$$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}E_BA\\C\end{pmatrix}=\operatorname{rank}E_BA+\operatorname{rank}C \tag{2.2b}$$

(ii) $$\operatorname{rank}E_BAF_C=\operatorname{rank}E_BA \tag{2.3a}$$

$$\operatorname{rank}E_BAF_C=\operatorname{rank}AF_C \tag{2.3b}$$

(iii) $$E_B(A-AQA)=0 \tag{2.4a}$$

$$(A-AQA)F_C=0 \tag{2.4b}$$

其中 $Q=F_C(E_BAF_C)^-E_B$．

证明 对(i)与(ii)用引理1可得．因(2.3a，b)等价于 $R(E_BA)=R(E_BAF_C)$，$N(AF_C)=N(E_BAF_C)$；后者又等价于 $(E_BAF_C)(E_BAF_C)^-E_BA=E_BA$，$AF_C(E_BAF_C)^-(E_BAF_C)=AF_C$．而这最后两式用$Q$表出后即(2.4a，b)． ■

引理 3[4] 记 $Q=F_C(E_BAF_C)^-E_B$，则

$$G_0=\begin{pmatrix}Q & (I-QA)C^-\\ B^-(I-AQ) & -B^-(A-AQA)C^-\end{pmatrix} \tag{6}$$

是M的一个g-逆，其中 B^-、C^-、$(E_BAF_C)^-$均可任取．

注 1 在验明G_0是M的g-逆时，不需用秩可加性条件，而仅需用下面恒真的等式：

$$CQ=0,\quad QB=0,\quad Q=F_CQ=QE_B=F_CQE_B \tag{7a}$$

$$E_B(A-AQA)F_C=0,\quad BB^-(A-AQA)F_C=(A-AQA)F_C,$$

$$E_B(A-AQA)C^-C=E_B(A-AQA) \tag{7b}$$

现在来叙述本文的主要结果．

定理 1 M(不必满足秩可加性条件)的g-逆的一般形式是

$$G=\begin{pmatrix}C_1 & C_2\\ C_3 & -C_4\end{pmatrix} \tag{8}$$

其中

$$\begin{cases}Q=F_C(E_BAF_C)^-E_B\\ C_1=Q+U_1E_B(I-AQ)+(I-QA)F_CV_1\ ,\\ C_2=(I-QA)C^--U_1E_B(A-AQA))C^-+U_2E_C+(I-QA)F_CV_2\\ C_3=B^-(I-AQ)+U_3E_B(I-AQ)-B^-(A-AQA)F_CV_1+F_BV_3\ ,\\ C_4=B^-(A-AQA)C^-+U_3E_B(A-AQA)C^-+U_4E_C\\ \qquad +B^-(A-AQA)F_CV_2+F_BV_4\ ,\end{cases} \tag{9}$$

其中 U_1，U_2，U_3，U_4，V_1，V_2，V_3，V_4 均为任意矩阵．

证明 据〔3，p.97，Theorem6.3.3〕，M的g-逆的一般形式是 $G=G_0+U(I-MG_0)+(I-G_0M)V$，$U$，$V$ 任取．以G_0代入计算后即得(9)． ■

推论 1 对M的任意g-逆$G=\begin{pmatrix}C_1 & C_2\\ C_3 & -C_4\end{pmatrix}$，下列包含关系成立：

$$\begin{cases}R(AC_1B)=R(B-BC_3B)\subset R[(A-AQA)F_C]\\ R[(CC_1A)^*]=R[(C-CC_2C)^*]\subset R[(E_B(A-AQA))^*]\\ R(BC_4-BC_3A)=R(A-AC_1A-AC_2C)\subset R[(A-AQA)F_C]\end{cases} \tag{10}$$ ■

证明 用(9)中所示的C_i代入验算．

定理 2 M的 g-逆中各子块 C_i 之间互相独立的充要条件是M满足秩可加性条件.

证明 充分性：由引理 2(iii)，此时(9)中 C_i 的表示式中只含有参数阵 U_i 与 V_i，而不含 $U_j, V_j(j\neq i)$，$i=1,2,3,4$. 显然，这样的 C_i 之间是互相独立的，也就是说，即使 C_1，C_2，C_3，C_4 来自不同的 g-逆，则由它们组合成的 $\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & -C_4 \end{pmatrix}$ 仍是M的 g-逆.

必要性：若(9)中所示的 C_i 之间互相独立，则当每个 C_i 所含的参数阵独立地任意取值时，所得的 C_i 组合成的 $G=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & -C_4 \end{pmatrix}$ 必须仍是M的 g-逆. 现在先取：$C_1=Q+U_1E_B(I-AQ)$，$C_2=(I-QA)C^- -\widetilde{U}_1E_B(A-AQA)C^-$，$C_3=B^-(I-AQ)$，$C_4=B^-(A-AQA)C^-$，其中 $U_1, \widetilde{U}_1$ 均可任意取值. 由 $MGM=M$ 可得等式 $AC_1A+BC_3A+AC_2C-BC_4C=A$. 以刚才所取的特殊形式的 C_i 代入，可得：

$$A(U_1-\widetilde{U}_1)E_B(A-AQA)=0 \tag{11}$$

在(11)中令 $U_1-\widetilde{U}_1=(E_BA)^-$，并以 E_B 左乘之，得到 $E_B(A-AQA)F_C=0$. 类似地可导出 $(A-AQA)F_C=0$. 由引理 2 知，此两式等价于秩可加性条件(2.1 a, b). ■

推论 2 设M满足秩可加性条件，则有：

(i)[4]

$$\begin{aligned} &BC_3B=B,\ CC_2C=C,\ CC_1B=0,\ CC_1A=0,\ AC_1B=0. \\ &BC_3A=AC_2C=BC_4C=A-AC_1A=A-AQA \text{ 为定值}. \end{aligned} \tag{12}$$

(ii)[7] 记 $S=BC_3A=AC_2C=BC_4C=A-AC_1A=A-AQA$，则有：

$$R(S)=R(A)\cap R(B),\quad R(S^*)=R(A^*)\cap R(C^*). \tag{13}$$

证明 (i)：用(2.4 a, b)，从推论 1 立得.

(ii)：因 S 为定值，与 B^-、C^- $(E_BAF_C)^-$ 的选取无关，故可取 $Q=F_C(E_BAF_C)^+E_B$，这时有 $QAQ=Q$. 对这个 Q，易证公式：

$$R(A-AQA)=R(A)\cap N(Q). \tag{14}$$

由于 $N(Q)\supset N(E_B)=R(B)$，故由(14)得 $R(S)\supset R(A)\cap R(B)$；但从 S 的定义知，$R(S)\subset R(A)\cap R(B)$. 故 $R(S)=R(A)\cap R(B)$. 类似地可导出 $R(S^*)=R(A^*)\cap R(C^*)$. ■

注 2 这里给出的关于等式(13)的证明，比[7]中的证明简单.

定理 3 M的Moore-Penrose逆的形式是

$$\begin{pmatrix} Q & (I-QA)C^+ \\ B^+(I-AQ) & -B^+(A-AQA)C^+ \end{pmatrix} \tag{15}$$

的充要条件是M满足秩可加性条件，(15)式中的 $Q=(E_BAF_C)^+=F_C(E_BAF_C)^+E_B$，$E_B=I-BB^+$，$F_C=I-C^+C$.

证明 充分性：直接验算，并用(2.4 a, b).

必要性：以 G 表示(15)式中的矩阵，则有

$$MG=\begin{pmatrix} AQ+BB^+(I-AQ) & E_B(A-AQA)C^+ \\ 0 & CC^+ \end{pmatrix}.$$

若 $G=M^+$，必有 $(MG)^*=MG$，从而有 $E_B(A-AQA)C^+=0$. 进而有 $E_B(A-AQA)C^+C=0$. 但据(7 b)，此式即 $E_B(A-AQA)=0$. 同理，由 $(GM)^*=GM$ 可导出 $(A-AQA)F_C=0$. 据引理 2, 此两式等价于秩可加性条件. ■

参 考 文 献

[1] F. J. Hall, SIAM J. Appl. Math., 29(1975), 152—163.

[2] F. J. Hall and C. D. Meyer, Sankhya, Ser. A, 37(1975), 428—438.

[3] S. L. Campbell and C. D. Meyer, Generalized Inverses of Linear Transformations, Pitman, London, 1979.

[4] S. K. Mitra, in G. Kallianpur & al., eds, Statistics and Probability: Essays in Honor of C. R. Rao, North-Holland Publishing Company, 1982, pp. 505—509.

[5] 党诵诗，数学研究与评论，2(1984)，105—107.

[6] G. Marsaglia and G. P. H. Styan, Lin. Multilin. Alg., 2(1974), 269—292.

[7] S. K. Mitra and M. L. Puri, Lin. Alg. Appl., 42(1982), 57—59.

On the Block Independence in g-Inverse of a Matrix $\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$

Chen *Yonglin*

(Nanjiing Normal University)

Abstract

In this paper, we proved a interesting fact that the rank additivity condition

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} + \operatorname{rank}\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A, B) + \operatorname{rank}(C, 0)$$

is a necessary and sufficient condition for block independence in g-inverse of $\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$, and moreover for that the Moore-Penrose inverse of $\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ is

$$\begin{pmatrix} Q & (I-QA)C^+ \\ B^+(I-AQ) & -B^+(A-AQA)C^+ \end{pmatrix},$$

where $Q = [(I-BB^+)A(I-C^+C)]^+$.