第11卷 第1期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol.11 No.1
1991年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 1991

非线性向量泛函微分方程解的振动比较定理*

关 治 洪

（江汉石油学院，湖北）

摘　　要

本文借助变换与不等式等方法将非线性向量泛函微分方程解的振动性与相应数量微分不等式是否存在正解作比较，得到若干振动比较定理并给出了具体应用.

§1 引　　言

考虑非线性向量形式的泛函微分方程

$$x'(t)=\sum_{k=1}^{m}A_k(t)G_k(t,x(t),x(r_k(t))) \tag{1}$$

其中 $x(t)\in R^n$，$A_k(t)\triangleq(a_{ij}^{(k)}(t))_{n\times n}$，$G_k(t,u,v)\triangleq(g_1^{(k)}(t,u_1,v_1),\cdots,g_n^{(k)}(t,u_n,v_n))^T$，$r_k(t)$ 均连续，且 $\lim\limits_{t\to+\infty}r_k(t)=+\infty$．$k=1,\cdots,m$.

对于 $G_k(t,u,v)$ 总假定：存在 t_0，当 $t\geq t_0$ 时，对 $k=1,\cdots,m$，$j=1,\cdots,n$ 有

（i）当 $u_j>0$，$v_j>0$ 时 $g_j^{(k)}(t,u_j,v_j)\geq0$ 且

$$g_j^{(k)}(t,-u_j,-v_j)=-g_j^{(k)}(t,u_j,v_j)\text{；}$$

（ii）当 $u_j>0$，$v_j>0$ 时存在非负连续函数 $f_k(t)$，$h_k(t)$ 使得

$$g_j^{(k)}(t,u_j,v_j)\geq f_k(t)u_j+h_k(t)v_j\text{.}$$

文[1—5]曾讨论过数量时滞微分方程

$$x'(t)=\sum_{k=1}^{m}a_k(t)x(t-\tau_k(t)) \tag{2}$$

的各种特殊情况的振动性，得到许多较好的结果，近来文[6,7]对此作了进一步的改进．这些工作大都依赖于形如 $x'(t)+p(t)x(t-\tau(t))\leq0$ 的数量不等式无最终正解．正是基于这一点，本文讨论了向量泛函微分方程（1）的振动性．特别地，$n=1$ 时，包含了文[1—5]的相应结果.

在本文中，所讨论的方程（1）的解都是假定在某一区间 $[T_x,+\infty)$ 上存在的.

定义　对于方程（1）的解 $x(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t))^T$，若存在 t_0 使得当 $t\geq t_0$ 时 $\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i(t)|>0$，且 $\operatorname{sgn}x_i(t)=\operatorname{sgn}x_i(t_0)$，$i=1,\cdots,n$．则称这个解是非振动的，否则称这个解是振动的.

* 1989年5月16日收到.

§ 2 振 动 比 较 定 理

定理 1 对微分方程(1)，若

1°. 存在常数 $b_i>0$, $i=1,\cdots,n$ 和非负连续函数 $q_k(t)$，$k=1,\cdots,m$ 使当 $t\geq t_0$ 时

$$a_{jj}^{(k)}(t)b_j+\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}|a_{ij}^{(k)}(t)|b_i\leq -q_k(t)b_j,\quad j=1,\cdots,n,\ k=1,\cdots,m; \tag{3}$$

2°. 数量微分不等式

$$z'(t)+q(t)z(t)+\sum_{k=1}^{m}p_k(t)z(r_k(t))\leq 0 \tag{4}$$

无最终正解，其中 $q(t)=\sum_{k=1}^{m}q_k(t)f_k(t)$，$p_k(t)=q_k(t)h_k(t)$. 则(1)的所有解振动.

证明 假设(1)有非振动解 $x(t)$，则存在 t_0，使得当 $t\geq t_0$ 时 $\sum_{i=1}^{n}|x_i(t)|>0$ 且 $\operatorname{sgn}x_i(t)=\operatorname{sgn}x_i(t_0)$，$i=1,\cdots,n$. 由于 $\lim_{t\to+\infty}r_k(t)=+\infty$，故存在 $t_1\geq t_0$，当 $t\geq t_1$ 时 $\sum_{i=1}^{n}|x_i(r_k(t))|>0$ 且 $\operatorname{sgn}x_i(r_k(t))=\operatorname{sgn}x_i(t_0)$，记 $e_i=\operatorname{sgn}x_i(t_0)$，置 $y_i(t)=|x_i(t)|=e_ix_i(t)$，$t\geq t_1$，$i=1,\cdots,n$. 则 $y_i(t)$ 连续可微，由

$$x_i'(t)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{z=1}^{n}a_{ij}^{(k)}(t)g_j^{(k)}(t,x_j(t),x_j(r_k(t)))$$

有

$$y_i'(t)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(k)}(t)e_ig_j^{(k)}(t,e_jy_j(t),e_jy_j(r_k(t))). \tag{5}$$

设 $z(t)=\sum_{i=1}^{n}b_iy_i(t)$，则 $z(t)>0$ $(t\geq t_1)$，且连续可微，注意到条件(i)、(ii)意味着

$$g_j^{(k)}(t,e_ju_j,e_jv_j)=e_jg_j^{(k)}(t,u_j,v_j),$$

故

$$z'(t)=\sum_{i=1}^{n}b_i\Big[\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(k)}(t)e_ig_j^{(k)}(t,e_jy_j,e_jy_j(r_k(t)))\Big]$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\Big[\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^{(k)}(t)b_ig_i^{(k)}(t,y_i(t),y_i(r_k(t)))+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}a_{ij}^{(k)}(t)b_ie_ie_jg_j^{(k)}(t,y_j(t),y_j(r_k(t)))\Big]$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\Big[\sum_{j=1}^{n}a_{jj}^{(k)}(t)b_jg_j^{(k)}(t,y_j(t),y_j(r_k(t)))+\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}a_{ij}^{(k)}(t)b_ie_ie_jg_j^{(k)}(t,y_j(t),y_j(r_k(t)))\Big]$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Big(a_{jj}^{(k)}(t)b_j+\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}a_{ij}^{(k)}(t)b_ie_ie_j\Big)g_j^{(k)}(t,y_j(t),y_j(r_k(t))) \tag{6}$$

$$\leq\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Big(a_{jj}^{(k)}(t)b_j+\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}|a_{ij}^{(k)}(t)|b_i\Big)g_j^{(k)}(t,y_j(t),y_j(r_k(t))).$$

由条件(ii)及(3)式，

$$z'(t)\leq\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(-q_k(t))b_j[f_k(t)y_j(t)+h_k(t)y_j(r_k(t))]$$

$$= -\sum_{k=1}^{m} q_k(t) f_k(t) \left(\sum_{j=1}^{m} b_j y_j(t)\right) - \sum_{k=1}^{m} q_k(t) h_k(t) \left(\sum_{j=1}^{n} b_j y_j(r_k(t))\right)$$

$$= -q(t)z(t) - \sum_{k=1}^{m} p_k(t) z(r_k(t)).$$

即 $z'(t)+q(t)z(t)+\sum_{k=1}^{m}p_k(t)z(r_k(t))\le 0$ 有正解 $z(t)>0$ $(t\ge t_1)$，这与条件2°矛盾. ■

定理 2 对微分方程(1)，若

1°. 存在常数 $b_i>0, i=1,\cdots,n$ 和非负连续函数 $q_k(t)$ 使得 $t\ge t_0$ 时有

$$a_{jj}^{(k)}(t)b_j - \sum_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n} |a_{ij}^{(k)}(t)| b_i \ge q_k(t) b_j,\ j=1,\cdots,n,\ \ k=1,\cdots,m; \tag{7}$$

2°. 不等式

$$z'(t)-q(t)z(t)-\sum_{k=1}^{m}p_k(t)z(r_k(t))\ge 0 \tag{8}$$

无最终正解，其中 $q(t)=\sum_{k=1}^{m}q_k(t)f_k(t)$，$p_k(t)=q_k(t)h_k(t)$. 则(1)的所有解振动.

证明 假设(1)有非振动解 $x(t)$，同定理1一样得到(6)式，于是

$$z'(t)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Big(a_{ij}^{(k)}(t)b_j+\sum_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n}a_{ij}^{(k)}(t)b_ie_ie_j\Big)g_j^{(k)}(t,y_j(t),y_j(r_k(t)))$$

$$\ge \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Big(a_{jj}^{(k)}(t)b_j-\sum_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n}|a_{ij}^{(k)}(t)|b_i\Big)g_j^{(k)}(t,y_j(t),y_j(r_k(t)))$$

$$\ge \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}q_k(t)b_j[f_k(t)y_j(t)+h_k(t)y_j(r_k(t))]$$

$$=q(t)z(t)+\sum_{k=1}^{m}p_k(t)z(r_k(t)),$$

即 $z'(t)-q(t)z(t)-\sum_{k=1}^{n}p_k(t)z(r_k(t))\ge 0$ 有最终正解 $z(t)=\sum_{i=1}^{n}b_iy_i(t)$ $(t\ge t_1)$，这与2°矛盾. ■

定理 3 对于(1)，若 $r_k(t)=t-\tau_k(t)$，$\tau_k(t)\ge 0$ 连续 $\lim_{t\to+\infty}(t-\tau_k(t))=+\infty$，$k=1,\cdots,m$，且

1°. 存在函数 $b_i(t)>0$，$b_i'(t)\ge 0$，$b_i'(t)\le Mb_i(t)$（M为常数），$i=1,\cdots,n$ 及非负连续函数 $q_k(t)$，$k=1,\cdots,m$ 使当 $t\ge t_0$ 时

$$a_{jj}^{(k)}(t)b_j(t)+\sum_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n}|a_{ij}^{(k)}(t)|b_i(t)\le -q_k(t)b_j(t)\quad j=1,\cdots,n,\quad k=1,\cdots,m; \tag{9}$$

2°. 不等式

$$z'(t)+(q(t)-M)z(t)+\sum_{k=1}^{m}p_k(t)z(t-\tau_k(t))\le 0 \tag{10}$$

无最终正解，其中 $q(t)$，$p_k(t)$ 如定理1所述. 则(1)的所有解振动.

证明 假设(1)有非振动解 $x(t)$，类似定理1构造

$$z(t)=\sum_{i=1}^{n}b_i(t)y_i(t),\quad y_i(t)=|x_i(t)|=e_ix_i(t),$$

则

$$z'(t)=\sum_{i=1}^{n}b_i'(t)y_i(t)+\sum_{i=1}^{n}b_i(t)y_i'(t)\leq M\sum_{i=1}^{n}b_i(t)y_i(t)+\sum_{i=1}^{n}b_i(t)y_i'(t),$$

即 $z'(t)-Mz(t)\leq\sum_{i=1}^{n}b_i(t)y_i'(t)$，类似定理1证明，注意到$b_i(t)$单调不减及 $p_k(t)=q_k(t)\times h_k(t)\geq 0$ 有

$$\begin{aligned}z'(t)-Mz(t)&\leq -q(t)z(t)-\sum_{k=1}^{m}p_k(t)\Big(\sum_{j=1}^{n}b_j(t)y_j(t-\tau_k(t))\Big)\\&\leq -q(t)z(t)-\sum_{k=1}^{m}p_k(t)\Big(\sum_{j=1}^{n}b_j(t-\tau_k(t))y_j(t-\tau_k(t))\Big),\end{aligned}$$

即

$$z'(t)+(q(t)-M)z(t)+\sum_{k=1}^{m}p_k(t)z(t-\tau_k(t))\leq 0. \tag{10}$$

有正解 $z(t)$ $(t\geq t_1)$，矛盾. ■

§3 应 用

对向量方程(1)的几种特殊情形:

$$x'(t)=\sum_{k=1}^{m}A_k(t)G_k(t,x(t),x(t-\tau_k(t))), \tag{11}$$

$$x'(t)=A(t)G(t,x(t),x(t-\tau(t))), \tag{12}$$

$$x'(t)=A(t)G(t,x(t),x(t+\tau(t))), \tag{13}$$

(在(12),(13)中 $A(t)=A_1(t)$, $G=G_1$)应用比较定理可得一些更为具体的振动判据.

对方程(11)，由比较定理1，利用文[6]关于时滞不等式(4)($r_k(t)=t-\tau_k(t)$)无最终正解的结果，可得

定理4 在(11)中，设$\tau_k(t)\geq 0$连续，$t-\tau_k(t)$单调不减，$\lim\limits_{t\to+\infty}(t-\tau_k(t))=+\infty$，$k=1,\cdots,m$，且(3)式成立，则下列条件之一是(11)的所有解振动的充分条件.

1°. 对某个k $(1\leq k\leq m)$

$$\varliminf_{t\to+\infty}\int_{t-\tau_k(t)}^{t}p_k(s)e^{\int_{s-\tau_k(s)}^{s}q(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}s>\frac{1}{e}$$

2°. $\varliminf\limits_{t\to+\infty}\int_{t-\tau_0(t)}^{t}\Big(\sum\limits_{k=1}^{m}p_k(s)\Big)e^{\int_{s-\tau_0(s)}^{s}q(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}s>\frac{1}{e}$, $\tau_0(t)=\min\limits_{1\leq k\leq m}\{\tau_k(t)\}$

3°. $$\varliminf_{t\to+\infty}\int_{t-\tau_k(t)}^{t}p_k(s)e^{\int_{s-\tau_k(s)}^{s}q(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}s>0\qquad k=1,\cdots,m. \tag{14}$$

且 $$\Big[\prod_{k=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{m}\varliminf_{t\to+\infty}\int_{t-\tau_j(t)}^{s}p_k(s)e^{\int_{s-\tau_k(s)}^{s}q(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}s\Big)\Big]>\frac{1}{e}$$

4°. (14)成立，且

$$\begin{aligned}&\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\Big(\varliminf_{t\to+\infty}\int_{t-\tau_j(t)}^{t}p_j(s)e^{\int_{s-\tau_j(s)}^{s}q(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}s\Big)\\&+\frac{2}{m}\sum_{\substack{j<k\\j,k=1}}^{m}\Big[\Big(\varliminf_{t\to+\infty}\int_{t-\tau_j(t)}^{t}p_k(s)e^{\int_{s-\tau_k(s)}^{s}q(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}s\Big)\Big(\varliminf_{t\to+\infty}\int_{t-\tau_k(t)}^{t}p_j(s)e^{\int_{s-\tau_j(s)}^{s}q(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}s\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}\\&>\frac{1}{e}.\end{aligned}$$

其中 $q(t)=\sum_{k=1}^{m}q_k(t)f_k(t)$ ； $p_k(t)=q_k(t)h_k(t)$， $k=1,\cdots,m$.

对方程(12)、(13)分别应用比较定理1,2,由文[7]的定理1与2易得

定理 5 对方程(12)，设 $\tau(t)\geq 0$ 连续， $\lim_{t\to+\infty}(t-\tau(t))=+\infty$，若存在 $q_1(t)\geq 0$ 使得

$$a_{jj}(t)+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}|a_{ij}(t)|\leq -q_1(t),\quad j=1,\cdots,n$$

且

$$\varliminf_{t\to+\infty}\int_{t-\tau(t)}^{t}p(s)e^{\int_{s-\tau(s)}^{s}q(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}s>\frac{1}{e},$$

则(12)的所有解振动，其中 $q(t)=q_1(t)f_1(t)$， $p(t)=q_1(t)h_1(t)$.

定理 6 对方程(13)，设 $\tau(t)\geq 0$ 连续，若存在 $q_1(t)\geq 0$ 使得

$$a_{jj}(t)-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}|a_{ij}(t)|\geq q_1(t),\quad j=1,\cdots,n$$

且

$$\varliminf_{t\to+\infty}\int_{t}^{t+\tau(t)}p(s)e^{\int_{s}^{s+\tau(s)}q(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}s>\frac{1}{e},$$

则方程(13)的所有解振动. $q(t)$, $p(t)$ 如定理5给出.

例 设有向量时滞微分方程

$$\begin{bmatrix}x_1'(t)\\ x_2'(t)\\ x_3'(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5+\cos t & \frac{t}{1+t^2} & t+\sin t\\ \sin t & -4 & e^{-t}\\ \frac{1}{t}+\cos^2 t & 2\cos t & -3-t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g_1(t,x_1(t),\ x_1(t-3+2\sin t)\\ g_2(t,x_2(t),\ x_2(t-3+2\sin t)\\ g_3(t,x_3(t),\ x_3(t-3+2\sin t)\end{bmatrix}\quad(15)$$

其中

$$g_1(t,u_1,v_1)=5u_1^2v_1+t^2u_1+10tv_1,$$
$$g_2(t,u_2,v_2)=v_2^3+e^tu_2+9t^2v_2,$$
$$g_3(t,u_3,v_3)=\sin u_3+3u_3^3+tu_3+te^{2\sin t}v_3.$$

容易验证， $\lim_{t\to+\infty}(t-3+2\sin t)=+\infty$， 取 $t\geq t_0=1$，对 $j=1,2,3$ 有：

$$a_{jj}(t)+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{3}|a_{ij}(t)|\leq -\frac{1}{t},\quad g_j(t,-u_j,-v_j)=-g(t,u_j,v_j);$$

当 $u_j>0$, $v_j>0$ 时， $g_j(t,u_j,v_j)\geq 0$, $g_j(t,u_j,v_j)\geq tu_j+te^{2\sin t}v_j$. 故

$$q(t)=\frac{1}{t}\cdot t=1,\ p(t)=\frac{1}{t}\cdot te^{2\sin t}=e^{2\sin t}$$

$$\varliminf_{t\to+\infty}\int_{t-3+2\sin t}^{t}e^{2\sin s}e^{\int_{s-3+2\sin s}^{s}\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}s=\varliminf_{t\to+\infty}e^3[3-2\sin t]>\frac{1}{e}$$

由定理5知方程(15)的所有解振动.

参 考 文 献

[1] O. Arino, I. Györi and A. Jawhari, J. Diff. Equa., 53(1984), 115—123.

[2] G. Ladas, Applicable Anal, 9(1979), 93—98.

[3] G. Ladas and I. P. Stavroulakis, J. Diff. Equa., 44(1982), 134—152.

[4] R. G. Koplatadze and T. A. Chanturija, Differentsial'nye Uravnenia, 18(1982), 1463—1465 (Russian).

[5] G. S. Ladde, Nonlinear Anal., 2(1978), 259—261.

[6] 魏俊杰，数学的实践与认识，3(1988)，9—19.

[7] 庚建设，数学学报，33，2(1990)，152—159.

Oscillatory Comparision Theorems of Solutions for the Nonlinear Vector Functional Differential Equations

Guan Zhihong

(Jianghan Petroleum Institute, Hubei)

Abstract

In this paper, we discussed the oscillatory comparision theorems of solutions for the nonlinear vector FDE:

$$x'(t)=\sum_{k=1}^{m}A_k(t)G_k(t,x(t),x(r_k(t)))$$

where A_k are $n\times n$ matrics and $x(t)\in R^n$, $G_k\in R^n$. Some oscillation theorems were given and results in paper [1—5] were generalized.