

关于拟常曲率空间的一个注记*

刘 祖 汉

(扬州师范学院数学系)

n 维($n \geq 3$)黎曼空间 V_n 称为是拟常曲率的, 如果在 V_n 中存在正交单位标架向量场 $X_1, X_2, \dots, X_n$, 在此标架下黎曼曲率张量的分量具有性质 $e_a e_\beta R_{a\beta\beta a} = H$, $e_n e_a R_{naaa} = N$, 其它分量为 0. $a, \beta = 1, 2, \dots, n-1, a \neq \beta$. H, N 为不变量, $e_a = \pm 1, e_\beta = \pm 1, e_n = \pm 1$.

熟知 $n > 3$ 的拟常曲率空间一定是共形平坦的^{[1]-[2]}. 但是在 3 维的情况下, 拟常曲率空间是否一定共形平坦? 黄正中教授在 [1] 中提出了这一问题. 我们现在证明, 这个问题的答案是否定的, 为此, 举出下面的反例.

设黎曼空间 V_3 的度量为

$$ds^2 = \frac{1}{x^2 + y^2 + x + y + 1} (dx^2 + dy^2) + dz^2,$$

记 $f = x^2 + y^2 + x + y + 1$. 则

$$\begin{aligned} g_{11} &= g_{22} = \frac{1}{f}, \quad g_{33} = 1; \\ R_{1221} &= -\frac{1}{f^2}, \quad R_{3113} = R_{3223} = 0, \\ R_{3123} &= R_{1223} = R_{2113} = 0. \end{aligned}$$

故 V_3 是拟常曲率的. 由于

$$\begin{aligned} R_{11} &= R_{22} = -\frac{1}{f^2}, \quad R_{33} = 0; \\ R_{ij,k} &= R_{ij,k} - R_{ik,j} + \frac{1}{4} (g_{ik} R_{,j} - g_{ij} R_{,k}); \\ R_{331} &= -(2x+1)/2f^2 \neq 0; \end{aligned}$$

故 V_3 不是共形平坦的.

这个例子表明, 存在非共形平坦的 3 维拟常曲率空间.

参 考 文 献

- [1] Hwang Chengchung, J. Math. Res. & Exposition, Vol. 3, No. 1 (1983), 1—16.
- [2] 蒋声, 自然杂志, 5 卷 9 期 (1982), 713.
- [3] 姜志渊, 数学研究与评论, 6 (2) (1986), 179—183.
- [4] L. P. Eisenhart, Riemannian Geometry, Princeton, 1949.

* 1989 年 10 月 23 日收到.