第11卷 第2期 数学研究与评论 Vol.11 No.2
1991年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May, 1991

广义Fourier变换及其应用*

崔尚斌
（兰州大学数学系）

用$(S'(R^n))^{2n}$表示$2n$个$S'(R^n)$的列笛卡尔积．对$S'(R^n)$上的连续线性算子K，用同一记号表示由它诱导出的$(S'(R^n))^{2n}$上如下定义的连续线性算子：

$$Kw=\begin{bmatrix} Kw_1 \\ Kw_2 \\ \vdots \\ Kw_{2n} \end{bmatrix}\in(S'(R^n))^{2n},\quad \forall w=\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{2n} \end{bmatrix}\in(S'(R^n))^{2n}.$$

引进连续线性映照$H:S'(R^n)\to(S'(R^n))^{2n}$如下：

$$Hu=\begin{bmatrix} D_1u \\ \vdots \\ D_nu \\ x_1u \\ \vdots \\ x_nu \end{bmatrix}\in(S'(R^n))^{2n},\quad \forall u\in S'(R^n).$$

其中$D_j=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$，$j=1,2,\cdots,n$．用$F$表示$R^n$上系数为$(2\pi)^{-\frac{n}{2}}$的Fourier变换．熟知$F$具下列性质：

$$F(D_ju)=x_jFu,\quad F(x_ju)=-D_jFu,\quad j=1,2,\cdots,n.$$

或者，用更简洁的式子书写，就是

$$FHu=J\cdot HFu,\quad \forall u\in S'(R^n),$$

其中$J=\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$为$2n$阶基本辛矩阵．更一般地，我们有

定理1 设S为实的$2n$阶辛矩阵．则

（1）存在$S'(R^n)$上的非零连续线性算子F_s使成立

$$F_SHu=S\cdot HF_Su,\quad \forall u\in S'(R^n);\tag{1.1}$$

（2）若$F_S^{(1)}$和$F_S^{(2)}$是$S'(R^n)$上使(1.1)成立的两个非零连续线性算子．则存在非零常数c使$F_S^{(1)}=cF_S^{(2)}$．

证明 （1）熟知任意实辛矩阵都可写成下列两种辛矩阵的乘积：

*1989年7月24日收到，1990年7月29日收到修改稿．本项研究受国家青年科学基金资助．

$$\begin{bmatrix} P & I_n - P \\ -I_n + P & P \end{bmatrix}，P\text{是幂等的对角矩阵；}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}，\det A \neq 0，A^{-1}B\text{与}CA^{-1}\text{为对称矩阵，}D = A'^{-1} + CA^{-1}B，$$

其中 A' 表示 A 的转置矩阵．对于第一类矩阵，设 P 的第 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 个对角元素为 0，其余对角元素为 1，则令 F_S 为关于变元 $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_k}$ 的部分 Fourier 变换，便有（1.1）成立；对于第二类辛矩阵，先令 F_S 为 $S(R^n)$ 上的下列连续线性算子：

$$(F_S u)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}i\langle x, A^{-1}Bx\rangle} \int_{R^n} e^{i\langle x, A'^{-1}\xi\rangle + \frac{1}{2}i\langle \xi, CA^{-1}\xi\rangle} \hat{u}(\xi)\, d\xi, \quad \forall u(x) \in S(R^n)$$

这里 $\hat{u}(\xi) = (Fu)(\xi)$，再把它连续地延拓到 $S'(R^n)$ 上，易验证它使（1.1）成立；最后，对一般的辛矩阵 S，先把它分解成上列两种辛矩阵的乘积，然后令 F_S 为所得相应算子按下面命题 4（3）中次序的复合算子，则易知 F_S 使（1.1）成立．

（2）首先证明，$S'(R^n)$ 上满足等式

$$KHu = HKu, \quad \forall u \in S'(R^n) \tag{1.2}$$

的唯一非零连续线性算子是恒等算子的常数倍．为此对任意 n 重指标 $\alpha \in Z_+^n$，令 $\varphi_\alpha(x)$ 为 R^n 上指标为 α 的Hermite函数[1]，特别 $\varphi_0(x) = \pi^{-\frac{n}{4}} e^{-\frac{1}{2}|x|^2}$．在（1.2）中取 $u(x) = \varphi_0(x)$ 便得

$$K\left(\frac{\partial}{\partial x_j} e^{-\frac{1}{2}|x|^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j} K\left(e^{-\frac{1}{2}|x|^2}\right), \quad K\left(x_j e^{-\frac{1}{2}|x|^2}\right) = x_j K\left(e^{-\frac{1}{2}|x|^2}\right),$$

这里 $j = 1, 2, \cdots, n$．由此得

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + x_j\right) K\left(e^{-\frac{1}{2}|x|^2}\right) = K\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + x_j\right) e^{-\frac{1}{2}|x|^2}\right) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

（注意 $\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + x_j\right) e^{-\frac{1}{2}|x|^2} = 0$）．积分便知 $K\left(e^{-\frac{1}{2}|x|^2}\right) = ce^{-\frac{1}{2}|x|^2}$，$c$ 为复常数．因此 $K\varphi_0 = c\varphi_0$．再利用关系式[1]

$$\varphi_\alpha(x) = (2^{|\alpha|}\alpha!)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} - x\right)^\alpha \varphi_0(x), \quad \forall \alpha \in Z_+^n$$

和（1.2）式即知 $K\varphi_\alpha = c\varphi_\alpha$，$\forall \alpha \in Z_+^n$，$c$ 为与上相同的复常数．再利用Simon定理[1]即知 $K = cI$，I 表示恒算子．

现在对任意辛矩阵 S，用 F_S 表示（1）之证明过程中构造的连续线性算子，而对任意使（1.1）成立的其他连续线性算子 F'_S，我们有

$$(F_{S^{-1}} F'_S)(Hu) = S \cdot F_{S^{-1}}(HF'_S u) = S \cdot S^{-1} \cdot H(F_{S^{-1}} F'_S u) = H(F_{S^{-1}} F'_S u), \quad \forall u \in S'(R^n).$$

故由已得结论知 $F_{S^{-1}} F'_S = cI$，c 为复常数；同理有 $F'_S F_{S^{-1}} = c'I$，c' 为另一复常数．在后一等式中特别取 $F'_S = F_S$，便知 $F_S F_{S^{-1}} = c'I$．于是通过对前一等式左复合 F_S，我们便得到 $F'_S = c''F_S$，c'' 为复常数．定理 1 证毕．

我们称连续线性算子 F_S 为对应于辛矩阵 S 的广义 **Fourier** 变换．这一算子具下列诸性质（证略）：

命题 1　F_S 在 $S(R^n)$ 上的限制是 $S(R^n)$ 上的连续线性算子．

命题 2　存在正常数 C 使成立

$$\|F_S u\| = C\|u\|, \quad \forall u \in L^2(R^n).$$

更一般地，对任意整数m，当$m\geq 0$时令$H^m(R^n)=\{u(x)\in S'(R^n)\,|$对每对满足$|\alpha+\beta|\leq m$的$n$重指标$\alpha$和$\beta\in Z_+^n$都有$x^\alpha D^\beta u(x)\in L^2(R^n)$，且$\|u\|_{H^m}^2=\sum\limits_{|\alpha+\beta|\leq m}\|x^\alpha D^\beta u\|<+\infty\}$，而当$m\leq 0$时令$H^m(R^n)=\{u(x)\in S'(R^n)\,|\,u(x)$可延拓为$H^{-m}(R^n)$上的连续线性泛函，即$\|u\|_{H^m}=\sup\limits_{v\in S(R^n)}|\langle u,v\rangle|/\|v\|_{H^{-m}}<+\infty\}$．则还成立：

命题 3 对任意整数m，存在常数$C_1>0$及$C_2>0$使成立

$$C_1\|u\|_{H^m}\leq\|F_S u\|\leq C_2\|u\|_{H^m}\ ,\quad \forall u\in H^m(R^n).$$

称使命题 2 中$C=1$的广义 Fourier变换为**标准广义Fourier 变换**．以下我们用F_S表示对应于辛矩阵S的标准广义Fourier 变换．在不计模1复常数因子的条件下，我们有

命题 4

（1） $F_{I_{2n}}=I$ ， $F_J=F$；

（2） $F_{S^{-1}}=F_S^{-1}=F_S^*$（* 表示共轭算子）；

（3） $F_{S_1S_2}=F_{S_2}F_{S_1}$ ．

（4） $F_SF=FF_{S'^{-1}}$ ， $FF_S=F_{S'^{-1}}F$．

对$R^n\times R^n$上满足

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta a(x,\xi)|\leq C_{\alpha\beta}(1+|x|+|\xi|)^{m-|\alpha+\beta|},\quad \forall(x,\xi)\in R^n\times R^n,\quad \forall(\alpha,\beta)\in Z_+^n\times Z_+^n\ ,$$

的C^∞函数$a(x,\xi)$，用$a_w(x,D)$表示以$a(x,\xi)$为符征的Weyl 型拟微分算子[2]．广义 Fourier变换的重要意义之一在于成立下列

定理 2 对任意Weyl型拟微分算子$a_W(x,D)$和任意辛矩阵S，$F_Sa_W(x,D)F_S^{-1}$仍然是Weyl 型拟微分算子，其符征由$a(x,\xi)$经变换$(\xi,x)\to(\xi,x)S'$而得到．换言之，

$$F_Sa_W(x,D)F_S^{-1}=b_W(x,D),$$

其中$b(x,\xi)=a(y,\eta)$，而$(\eta,y)=(\xi,x)S'$．

关于与我们提出的这一概念有关的研究请参看［2］,［3］等．关于本文结果的应用请参看［4］,［5］及本文作者今后的一些文章．

参 考 文 献

［1］崔尚斌，一类函数空间及其应用．兰州大学学报(自科版)，26(1990)，2:9～20．

［2］Hörmander, L. The Analysis of Linear Partial Differential Operators, Vol. Ⅲ, 150～160.Springer-Verlag. 1985．

［3］Taylor, E. M. Noncommutative Harmonic Analysis. Amer Math Soc, Providence, Rhode Island 1986．

［4］崔尚斌，Heisenberg 群上二阶横截双曲型左不变LPDO的局部可解性——非离散现象．科学通报，35(1990)，8:565—568．

［5］崔尚斌，Heisenberg群上二阶左不变LPDO的局部可解性——辛变换技巧．兰州大学学报(自科版)，待发表．

Generalized Fourier Transformations and Their Applications

Cui Shangbin

(Math. Dept., Lanzhou Univ.)

Abstract

It is proved that for each $2n\times 2n$ symplectic matrix S, there exists continuous linear map F_S: $S'(R^n)\to S'(R^n)$, unique up to a constant factor, such that

$$F_S\begin{bmatrix} D_1 u \\ \vdots \\ D_n u \\ x_1 u \\ \vdots \\ x_n u \end{bmatrix} = S\cdot\begin{bmatrix} D_1 F_S u \\ \vdots \\ D_n F_S u \\ x_1 F_S u \\ \vdots \\ x_n F_S u \end{bmatrix} \qquad \forall u\in S'(R^n).$$

F_S is called the generalized Fourier transformation. Some properties and applications of F_S are obtained. In especial, the lower and upper boundedness of F_S in $H^m(R^n)$ is proved and a new proof of L. Hormander Theorem is given.