第11卷 第2期 1991年5月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.11 No.2 May, 1991

具有缓变系数非线性周期系统周期解的存在唯一性

金 均
（上海师范大学数学系）

提 要

本文利用Liapunov函数的方法，讨论了一类具有缓变系数的非线性非自治周期系统

$$\dddot{x}+a(t)\ddot{x}+b(t)\dot{x}+g(t,x)=f(t,x,\dot{x},\ddot{x})$$

$$\dddot{x}+a(t)\ddot{x}+g(t,\dot{x})+c(t)x=f(t,x,\dot{x},\ddot{x})$$

$$\dddot{x}+g(t,\ddot{x})+b(t)\dot{x}+c(t)x=f(t,x,\dot{x},\ddot{x})$$

的周期解的存在唯一性，得到了保证系统存在唯一稳定周期解的充分条件，并对系统的缓变范围作了精确的估计．

I．引 言

文[1]对一般的n维非线性周期系统

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x}+g(t,\vec{x})$$

进行了深刻的研究，得到了存在稳定的周期解的充分条件，[2]对常系数非线性系统

$$\dddot{x}+a\ddot{x}+b\dot{x}+f(t,x)=0$$

$$\dddot{x}+a\ddot{x}+f(t,\dot{x})+cx=0$$

$$\dddot{x}+f(t,\ddot{x})+b\dot{x}+cx=0$$

作了研究，得到了存在周期解的充分条件．[3]研究了

$$\dddot{x}+c_1\ddot{x}+c_2\dot{x}+f(t,x)=e(t)$$

的周期解的存在性，本文对常见的具有缓变系数的非线性非自治周期系统

$$\dddot{x}+a(t)\ddot{x}+b(t)\dot{x}+g(t,x)=f(t,x,\dot{x},\ddot{x}) \tag{1}$$

$$\dddot{x}+a(t)\ddot{x}+g(t,\dot{x})+c(t)x=f(t,x,\dot{x},\ddot{x}) \tag{2}$$

$$\dddot{x}+g(t,\ddot{x})+b(t)\dot{x}+c(t)x=f(t,x,\dot{x},\ddot{x}) \tag{3}$$

利用Liapunov函数方法，作出了简单实用的V函数，建立了系统(1)—(3)存在唯一稳定周期解的充分条件，并对缓变系数的范围作了精确的估计．这里的$a(t)$，$b(t)$，$c(t)$，$g(t,\cdot)$，$f(t,x,\dot{x},\ddot{x})$均为以$\omega(>0)$为周期的周期函数，且关于各自的变量是连续可微的．为了方便的目的，我们先引入下列引理．考虑系统

$$\dot{\vec{x}}=\vec{F}(t,\vec{x}), \tag{4}$$

* 1989年7月29日收到．

这里 $\vec{F}(t,\vec{x})\in C^1(R\times R^n)\to R^n$，$\vec{F}(t+\omega,\vec{x})=\vec{F}(t,\vec{x})$，$\omega>0$.

引理1[4] 假设 $K_1(r)$，$K_2(r)$，$K_3(r)$ 是连续递增的正函数．如果存在定义在乘积空间

$$\Delta:\ I(0\le t<\infty)\times E_{R_1}(\|\vec{x}\|\ge R_1,\ R_1\ge 0)$$

上的定正 V 函数，且满足

1）$V(t,\vec{x})\le K_1(\|\vec{x}\|)$，

2）$V(t,\vec{x})\ge K_2(\|\vec{x}\|)$，$\lim\limits_{r\to\infty}K_2(r)=\infty$，

3）$\dot{V}(t,\vec{x})|_{(4)}\le -K_3(\|\vec{x}\|)$，

则系统（4）的解是一致最终有界的．

引理2[1] 如果系统（4）的解是最终有界的，且界为 M，则（4）存在以 ω 为周期的周期解，且有 $\|\vec{x}(t)\|\le M$，$\forall t\in[t_0,\infty)$，$t_0\ge 0$.

引理3[5] 如果系统（4）是非常稳定的，且有一个有界解，则（4）存在唯一的以 ω 为周期的周期解，且（4）的所有解当 $t\to+\infty$ 时都逼近于它．

2．周期解的存在性

首先考虑系统（1）或它的等价方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=z\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-c(t)x-b(t)y-a(t)z+c(t)x-g(t,x)+f(t,x,y,z)\end{cases}\tag{1'}$$

的周期解的存在性，得到下面的定理：

定理1 如果（1′）满足下列条件

1）$A(t)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-c(t)&-b(t)&-a(t)\end{bmatrix}$ 的广义特征方程

$$\lambda^3+a(t)\lambda^2+b(t)\lambda+c(t)=0\tag{5}$$

均具有负实部的特征根，且 $\mathrm{Re}\,\lambda_i(t)\le-\delta<0$（$i=1,2,3$）；

2）$a(t)$，$b(t)$，$c(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界，并设公共上界为 B；

3）$|\dot{a}(t)|\le\varepsilon$，$|\dot{b}(t)|\le\varepsilon$，$|\dot{c}(t)|\le\varepsilon$，$\varepsilon\le\dfrac{6\delta^6}{9B^2+5B+3/2}$；

4）$\lim\limits_{\rho\to\infty}\dfrac{|f(t,x,y,z)|}{\rho}=0$，$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$；

5）$\lim\limits_{\rho\to\infty}\dfrac{|c(t)x-g(t,x)|}{\rho}=0$.

则系统（1′）至少存在一个以 ω 为周期的周期解．

证明 考虑齐线性方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y \\
\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=z \\
\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-c(t)x-b(t)y-a(t)z,
\end{cases}
\tag{6}
$$

因为它的广义特征方程（5）均具有负实部的特征根，所以由Routh-Hurwitz条件知$a(t)>0$，$c(t)>0$，$a(t)b(t)-c(t)>0$. 根据根与系数的关系，不难估计出$a(t)\geq 3\delta$，$b(t)\geq 3\delta^2$，$c(t)\geq\delta^3$，$a(t)b(t)-c(t)\geq 8\delta^3$. 为了方便，下面记$a(t)=a$，$b(t)=b$，$c(t)=c$. 给定二次型

$$w(x,y,z)=-c(ab-c)(x^2+y^2+z^2),$$

根据巴尔巴辛公式，作Liapunov函数

$$V(t,x,y,z)=V_{11}x^2+2V_{12}xy+2V_{13}xz+V_{22}y^2+2V_{23}yz+V_{33}z^2 \tag{7}$$

使$\dfrac{\partial V}{\partial x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\partial V}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\partial V}{\partial z}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial V}{\partial x}y+\dfrac{\partial V}{\partial y}z+\dfrac{\partial V}{\partial z}(-c(t)x-b(t)y-a(t)z)=w(x,y,z)$，经过计算得：

$$V_{11}=\frac{1}{2}(c^3+ac^2+ab^2-bc+a^2c),\quad V_{12}=\frac{1}{2}(a^2b+c^2+bc^2),\quad V_{13}=\frac{1}{2}(ab-c),$$

$$V_{22}=\frac{1}{2}(a^3+a^2c+ac^2+b^2c+bc+c),\quad V_{23}=\frac{1}{2}(a^2+ac+c^2),\quad V_{33}=\frac{1}{2}(a+bc+c)$$

显然V函数（7）是定正的，且它沿着（1′）的轨线的全导数为

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(1')}=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\leq\left|\frac{\partial V}{\partial t}\right|-c(ab-c)(x^2+y^2+z^2)$$
$$+\left|\frac{\partial V}{\partial z}(c(t)x-g(t,x)+f(t,x,y,z))\right|$$

由条件2）、3），经过计算估计得

$$\left|\frac{\partial V}{\partial t}\right|\leq(9B^2+5B+3/2)\varepsilon(x^2+y^2+z^2)\leq 6\delta^6(x^2+y^2+z^2).$$

下面估计$\left|\dfrac{\partial V}{\partial z}\right|$，$|c(t)x-g(t,x)|$，$|f(t,x,y,z)|$，由条件4)，5)，对任意给定常数$\eta_1>0$（$\eta_1<\dfrac{\delta^6}{2(5B^2+3B)}$），必存在一个充分大的正数$R_1$，使得当$x^2+y^2+z^2\geq R_1^2$时，不等式

$$|f(t,x,y,z)|/\sqrt{x^2+y^2+z^2}<\eta_1,\quad |c(t)x-g(t;x)|/\sqrt{x^2+y^2+z^2}<\eta_1$$

同时成立. 此外，

$$\left|\frac{\partial V}{\partial z}\right|=|2V_{13}x+2V_{22}y+2V_{33}z|\leq(5B^2+3B)\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

所以，
$$\left|\frac{\partial V}{\partial z}(c(t)x-g(t,x)+f(t,x,y,z))\right|\leq\left|\frac{\partial V}{\partial z}\right|(|c(t)x-g(t,x)|+|f(t,x,y,z)|$$
$$\leq 2\eta_1(5B^2+3B)(x^2+y^2+z^2)<\delta^6(x^2+y^2+z^2).$$

在乘积空间

$$\Omega^c:\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\geq R_1^2\}\times I\,(0\leq t<\infty)$$

中有

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1')}<6\delta^6(x^2+y^2+z^2)-8\delta^6(x^2+y^2+z^2)+\delta^6(x^2+y^2+z^2)=-\delta^6(x^2+y^2+z^2)$$

因此 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1')}$ 在Ω^c中是定负的．由引理1得知系统(1′)的解是最终一致有界的，它的有界域为

$$\Omega:\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2<R_1^2,\ R_1=R_1(\eta_1)>0\}.$$

再根据引理2，系统(1′)存在以ω为周期的周期解．定理1得证．

对系统(2)或它的等价方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=z\\[2mm] \dfrac{dz}{dt}=-c(t)x-b(t)y-a(t)z+(b(t)y-g(t,y))+f(t,x,y,z)\end{cases}\tag{2′}$$

我们得到

定理2 如果系统(2′)满足定理1的条件1)—4)，且

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{|g(t,y)-b(t)y|}{\rho}=0$$

则(2′)存在以ω为周期的周期解．

对系统(3)或它的等价方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=z\\[2mm] \dfrac{dz}{dt}=-c(t)x-b(t)y-a(t)z+(a(t)z-g(t,z))+f(t,x,y,z)\end{cases}\tag{3′}$$

有下面的

定理3 如果(3′)满足定理1的条件1)—4)，且

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{|g(t,z)-a(t)z|}{\rho}=0$$

则系统(3′)存在以ω为周期的周期解．

定理2、3的证明，完全类似于定理1，故略．

3．周期解的唯一性与稳定性

下面我们证明系统(1)—(3)的周期解的唯一性与稳定性．为此，只要证明系统(1)—(3)是非常稳定的．

定理4 如果系统(1′)满足定理1的条件，且$g'_x(t,x)$，$f'_x(t,x,y,z)$，$f'_y(t,x,y,z)$，$f'_z(t,x,y,z)$是连续的，$|c(t)-g'_x(t,x)|<\eta_2$ ($\eta_2\le\dfrac{\delta^6}{4(5B^2+3B)}$)，则系统(1′)存在唯一的以$\omega$为周期的周期解，且是渐近稳定的．

证明 设(x^*,y^*,z^*)和$(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$为系统(1′)的任意二个解，即它们满足

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx^*}{dt}=y^* \\
\dfrac{dy^*}{dt}=z^* \\
\dfrac{dz^*}{dt}=-c(t)x^*-b(t)y^*-a(t)z^*+(c(t)x^*-g(t,x^*))+f(t,x^*,y^*,z^*)
\end{cases}
\tag{8}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\overline{x}}{dt}=\overline{y} \\
\dfrac{d\overline{y}}{dt}=\overline{z} \\
\dfrac{d\overline{z}}{dt}=-c(t)\overline{x}-b(t)\overline{y}-a(t)\overline{z}+(c(t)\overline{x}-g(t,\overline{x}))+f(t,\overline{x},\overline{y},\overline{z})
\end{cases}
\tag{9}
$$

由(8)－(9)，再令$u_1=x^*-\overline{x}$，$u_2=y^*-\overline{y}$，$u_3=z^*-\overline{z}$，得到

$$
\begin{cases}
\dfrac{du_1}{dt}=u_2 \\
\dfrac{du_2}{dt}=u_3 \\
\dfrac{du_3}{dt}=-c(t)u_1-b(t)u_2-a(t)u_3+c(t)u_1-[g(t,x^*)-g(t,\overline{x})]+[f(t,x^*,y^*,z^*)- \\
\qquad -f(t,\overline{x},\overline{y},\overline{z})]
\end{cases}
\tag{10}
$$

由 $g(t,x^*)-g(t,\overline{x})=g_x'(t,\overline{x}+\theta(x^*-\overline{x}))(x^*-\overline{x})=g_x'(t,h(t))(x^*-\overline{x})$，$(0<\theta<1)$.

$f(t,x^*,y^*,z^*)-f(t,\overline{x},\overline{y},\overline{z})=[f(t,x^*,y^*,z^*)-f(t,\overline{x},y^*,z^*)]+[f(t,\overline{x},y^*,z^*)-f(t,\overline{x},\overline{y},z^*)]+[f(t,\overline{x},\overline{y},z^*)-f(t,\overline{x},\overline{y},\overline{z})]=f_x'(t,\overline{x}+\theta_1(x^*-\overline{x}),y^*,z^*)(x^*-\overline{x})+f_y'(t,\overline{x},\overline{y}+\theta_2(y^*-\overline{y}),z^*)(y^*-\overline{y})+f_z'(t,\overline{x},\overline{y},\overline{z}+\theta_3(z^*-\overline{z}))(z^*-\overline{z})$,

$(0<\theta_i<1,i=1,2,3)$，记$\overline{x}+\theta_1(x^*-\overline{x})=h_1(t)$，$\overline{y}+\theta_2(y^*-\overline{y})=h_2(t)$，$\overline{z}+\theta_3(z^*-\overline{z})=h_3(t)$，则(10)可以改写成：

$$
\begin{cases}
\dfrac{du_1}{dt}=u_2 \\
\dfrac{du_2}{dt}=u_3 \\
\dfrac{du_3}{dt}=-c(t)u_1-b(t)u_2-a(t)u_3+(c(t)-g_x'(t,h(t)))u_1+f_x'(t,h_1(t),y^*,z^*)u_1 \\
\qquad +f_y'(t,\overline{x},h_2(t),z^*)u_2+f_z'(t,\overline{x},\overline{y},h_3(t))u_3
\end{cases}
\tag{11}
$$

显然，证明(1′)的解是非常稳定的是等价于证明(11)的零解是全局渐近稳定的.为此估计(11)的右端非线性项，由条件 $\lim\limits_{\rho\to\infty}\dfrac{|f(t,x,y,z)|}{\rho}=0$，当$x$变化，$y,z$固定，则上式极限关系还是成立的，所以由

$$f(t,x,y^*,z^*)-f(t,0,y^*,z^*)=f_x'(t,\theta_i x,y^*,z^*)x$$

得
$$\lim_{x^2\to\infty}\frac{f(t,x,y^*,z^*)-f(t,0,y^*,z^*)}{x}=0=\lim_{x^2\to\infty}f_x'(t,\theta_1 x,y^*,z^*)$$

同样可得：

$$\lim_{y^2\to\infty} f_y'(t, x^*, \theta_2 y, z^*) = 0, \quad \lim_{z^2\to\infty} f_z'(t, x^*, y^*, \theta_3 z) = 0$$

所以对任意给定的常数$\eta_2>0$ ($\eta_2\leq\dfrac{\delta^6}{4(5B^2+3B)}$)，总存在充分大的$R_2>0$，使得$x^2+y^2+z^2>R_2^2$时有$|f_x'(t,x,y,z)|<\eta_2$，$|f_y'(t,x,y,z)|<\eta_2$，$|f_z'(t,x,y,z)|<\eta_2$.

我们仍取(7)作为(11)的Liapunov函数，即

$$V(t,u_1,u_2,u_3)=V_{11}u_1^2+2V_{12}u_1u_2+2V_{13}u_1u_3+V_{22}u_2^2+2V_{23}u_2u_3+V_{33}u_3^2,$$

它的全导数

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(11)}&=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial u_1}u_2+\frac{\partial V}{\partial u_2}u_3+\frac{\partial V}{\partial u_3}(-c(t)u_1-b(t)u_2-a(t)u_3)\\&+\frac{\partial V}{\partial u_3}[(c(t)-g_x'(t,h(t)))u_1+f_x'(t,h_1(t),y^*,z^*)u_1+f_y'(t,\overline{x},h_2(t),\\&z^*)u_2+f_z'(t,\overline{x},\overline{y},h_3(t))u_3]\leq\left|\frac{\partial V}{\partial t}\right|-c(ab-c)(u_1^2+u_2^2+u_3^2)\\&+4\eta_2\left|\frac{\partial V}{\partial u_3}\right|\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}<-\delta^6(u_1^2+u_2^2+u_3^2).\end{aligned}$$

显然，在乘积空间

$$\Omega^c:\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\geq R_2^2\}\times I(0\leq t<\infty)\}$$

上$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(11)}$，$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(1')}$均为定负，因此系统(11)的零解是全局渐近稳定的，所以(1′)是非常稳定的，由引理3得系统(1′)存在唯一的以ω为周期的周期解，且是渐近稳定的. 定理4证毕.

同样可以证明

定理5 系统(2′)如果满足定理2的条件及$g_y'(t,y)$，$f_x'(t,x,y,z)$，$f_y'(t,x,y,z)$，$f_z'(t,x,y,z)$连续，且$|b(t)-g_y'(t,y)|<\eta_2$ ($\eta_2\leq\dfrac{\delta^6}{4(5B^2+3B)}$)，则系统(2′)存在唯一的以$\omega$为周期的渐近稳定的周期解.

定理6 系统(3′)如果满足定理3的条件及$g_z'(t,z)$，$f_x'(t,x,y,z)$，$f_y'(t,x,y,z)$，$f_z'(t,x,y,z)$连续，且$|a(t)-g_z'(t,z)|<\eta_2$ ($\eta_2\leq\dfrac{\delta^6}{4(5B^2+3B)}$)，则系统(3′)存在唯一的以$\omega$为周期的渐近稳定的周期解.

参 考 文 献

[1] Wang Lian, Wang Muqiu, On Periodic Solution of Higher Order Nonlinear Periodical System, Ann. of Diff. Eqs., 1987.

[2] Wang Rongliang, Existence and Stability of Periodic Solution for a Class of Nonlinear and Nonautonomy System of three Order KEXUE TONGBAO, Vol. 32, No. 16, 1987.

[3] Mehrl, B., Rev. Roumaine. Math. Pures Appl, 23(1978), 9: 1367—1373.

[4] 秦元勋，王慕秋，王联，运动稳定性理论与应用，科学出版社，1981.

[5] Lasalle, 3. and Lefschetz, S. Stability by Liapunov's Direct Method with Application, New York, Aeademic press, 1961, P. 66.

Existence and Uniqueness of Periodic Solutions of a Class of Nonlinear Periodic Systems with Slowly Changed Coefficients

Jin Jun

(Shanghai Teachers University)

Abstract

In this paper, we study the problem of periodic solutions of a class of nonlinear and nonautonomous periodic systems with slowly changed coefficients

$$\dddot{x}+a(t)\ddot{x}+b(t)\dot{x}+g(t,x)=f(t,x,\dot{x},\ddot{x})$$

$$\dddot{x}+a(t)\ddot{x}+g(t,\dot{x})+c(t)x=f(t,x,\dot{x},\ddot{x})$$

$$\dddot{x}+g(t,\ddot{x})+b(t)\dot{x}+c(t)x=f(t,x,\dot{x},\ddot{x})$$

and obtain some sufficient conditions which guarantee existence, uniqueness and stability of the periodic solutions of these systems.