第11卷 第3期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol.11 No.3
1991年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1991

Γ-环的单位元*

陈 维 新
（浙江大学数学系，杭州）

提　要

Γ-环的乘法单位元比结合环的乘法单位元更复杂，更富有变化．首先它有单位元，a-单位元（强单位元）之分，其次它具有与结合环单位元相异的性质，对此本文逐一阐述．此外还探讨了Γ-环M与其矩阵环$M_{m,n}$单位元间的关系．在导入Γ-环的特征这一概念后，证明了具有单位元Γ-环的特征的一些性质．

文中凡环均指结合环，一般以A表示，而以M表示Γ-环M，其右算子环记为R，左算子环记为L．有关Γ-环的基本概念和基本性质可参见〔1〕、〔2〕，本文不再赘述．

Γ-环的右（左）单位元概念由Kyuno在〔3〕中导入，Γ-环的强右（左）单位元概念由Booth在〔4〕中导入，概述如下：

定义1　若在Γ-环M的右算子环R中存在元素$\sum_{i=1}^{k}[a_i,e_i]$使得对M中任意元素x，均有$\sum_{i=1}^{k}xa_ie_i=x$．则称M具有右单位元$\sum_{i=1}^{k}[a_i,e_i]$．特别当$k=1$时，则称M具有强右单位元$[a_1,e_1]$．

同样可定义M的左单位元和强左单位元．

定义2　若$\sum_{i=1}^{k}[a_i,e_i]$是Γ-环M的右单位元，$\sum_{i=1}^{k}[e_i,a_i]$是M的左单位元，则称M具有单位元．特别当$k=1$时，则称M具有强单位元．

例1　$\{A,+,\cdot\}$为环，取$M=\{A,+\}$，$\Gamma=\{Z,+\}$整数加法群，定义$M\times\Gamma\times M\to M$的合成为：

$$xny=n(x\cdot y)\quad\forall x,y\in M,\quad\forall n\in Z.$$

则M为Γ-环，此时

$$\sum_{i=1}^{k}xn_iy_i=x\cdot(\sum_{i=1}^{k}n_iy_i);\ \sum_{j=1}^{l}y_jn_jx=(\sum_{j=1}^{l}n_jy_j)\cdot x.$$

这表明Γ-环M有没有单侧、双侧单位元完全取决于环A的性态．

众所周知在结合环中有下述命题：

（1）存在具有无穷多个右（左）单位元的环．

（2）若环A既有左单位，又有右单位元，则二者必相等，且就是A的单位元．

*1989年9月3日收到．浙江省自然科学基金资助的课题．

（3）环A若有唯一的右（左）单位元e，则e就是A的单位元.

然上述命题在Γ-环论中相应的结论均不成立，下面将逐一表明.

定理 1 若Γ-环M具有右单位元，则必唯一，且即为其右算子环R的单位元.

证明 只要证明若$\sum_{i=1}^{k}[a_i,e_i]$为Γ-环M的右单位元，则$\sum_{i=1}^{k}[a_i,e_i]$必是R的单位元，从而唯一，定理就得证. 下证之：易验证M的右单位元$\sum_{i=1}^{k}[a_i,e_i]$是R的右单位元. 另一方面对任意的$[\beta,y]\in R$. 考虑$\sum_{i=1}^{k}[a_i,e_i]\cdot[\beta,y]=\sum_{i=1}^{k}[a_i,e_i\beta y]$因对任意的$x\in M$有$\sum_{i=1}^{k}xa_ie_i=x$. 故$x\beta y-\sum_{i=1}^{k}xa_ie_i\beta y=x\beta y-x\beta y=0$. 即$[\beta,y]=\sum_{i=1}^{k}[a_i,e_i\beta y]$ 故$\sum_{i=1}^{k}[a_i,e_i]$是R的单位元. □

推论 若Γ-环M具有右单位元$\sum_{i=1}^{k}[a_i,e_i]$，则其右算子环R中元素均形如$\sum_{i=1}^{k}[a_i,x_i]$，其中$x_i\in M$.

证明 由定理1知$\sum_{i=1}^{k}[a_i,e_i]$为R的单位元，故对R中的元$[a,x]$有：$[a,x]=\sum_{i=1}^{k}[a_i,e_i]\cdot[a,x]=\sum_{i=1}^{k}[a_i,e_iax]$，而$R$中元素无非形如$[a,x]$元的有限和，故命题得证.

M具左单位元，结论类似，此不赘述.

例 2 V为实数域上n维欧氏空间（$n>1$），取$\Gamma=V$. 定义$V\times\Gamma\times V\to V$的合成为：

$$a\cdot\delta\cdot b=(a,\delta)b\qquad\forall a,b\in\forall,\ \forall\delta\in\Gamma$$

其中(a,δ)表示a,δ的内积，则V构成Γ-环. 取V的一组标准正交基$e_1,e_2,\cdots,e_n$. 则V具有左单位元$[e_1,e_1]$，右单位元$\sum_{i=1}^{n}[e_i,e_i]$，然$[e_1,e_1]$不是右单位元，因$e_2\cdot e_1\cdot e_1=(e_2,e_1)e_1=0\neq e_2$. 同样由$\sum_{i=1}^{n}e_ie_ie_1=ne_1\neq e_1$知$\sum_{i=1}^{n}[e_i,e_i]$不是在单位元. 这表明有这样Γ-环，它具有唯一左单位元和唯一右单位元，但二者不等，从而不具有单位元.

例 3 取M为域F上2×2阶矩阵全体所成的加群，$\Gamma=\{\begin{pmatrix}a&0\\b&0\end{pmatrix}|a,b\in F\}$定义$M\times\Gamma\times M\to M$的合成为矩阵乘法，则$M$为Γ-环. 易知$M$有右单位元$[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}]+$ $+[\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}]$，然$M$无左单位元,这是因取$x=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\in M$有

$\sum_{i=1}^{n}e_ix_ix\neq x$，$\forall e_i\in M$，$\forall a_i\in\Gamma$，$n$为任意正整数. 这样$M$虽有唯一右单位元，但没有单位元.

强（单侧）单位元是（单侧）单位元，反之则未必然，容易证明上述例2中的V具有右单位元$\sum_{i=1}^{n}[e_i,e_i]$但不具强右单位元，例3中的M也如此.

在上述Γ-环单位元的讨论中，值得注意的是无论单侧或双侧（强）单位元均不是Γ-环M自身的元素，故人们希望能在Γ-环M自身的元素中能有单位元的概念，这无论从Γ-环是结合环的拓广这一背景，还是从单位元的存在可刻划环性态上说都是很有必要的。为此笔者在〔5〕中已引入了α-单位元的概念：

定义 3 若Γ-环M有强右（左）单位元〔α,e〕(〔e,α〕)，则M中元e称为M的α-右（左）单位元。

定义 4 若$e\in M$既是α-右单位元，又是α-左单位元，则e称为M的α-单位元。

例 4 取$M=\{ai\mid a$是实数，$i=\sqrt{-1}\}$，$\Gamma=M$。若定义$M\times\Gamma\times M\to M$的合成为数的乘法，则$M$为Γ-环，$\Gamma$中任意的$ai\neq 0$，$M$具有$(ai)$-单位元$-a^{-1}i$。

据定理 1 知，若e_i分别是M的α_i-右单位元（$i=1,2,\cdots,k$）则在M的右算子环R中有〔α_1,e_1〕=〔α_2,e_2〕=$\cdots$=〔α_k,e_k〕。然例 4 表明当$\alpha_i\neq\alpha_j$时$e_i\neq e_j$。〔5〕中阐明：当$M\neq 0$，$|\Gamma|>2$时，不存在M中元素e，使对所有Γ中非零元α都成为α-右单位元（即$x\alpha e=x$，$\forall x\in M$）。这表明α-单位元是结合环论中单位元在Γ-环论中合适的推广。更能说明这种拓广是合适的，还表现在如同结合环A的单位元可刻划A，Γ-环M的α-单位元、单位元均可刻划M。

定理 2 若Γ-环I具有单位元，则只要I是Γ-环M的理想，I就必是M的直和项，即$M=I\oplus J$，其中J为M的某个理想。

证明 事实上$J=\{x\in M\mid x\Gamma I=\{0\}=I\Gamma x\}$。详细证明参见〔5〕，定理 1。

定理 3 I是例 1 中所说的Γ-环，若对任意以I为理想的Γ-环M，均有$M=I\oplus J$则I具有强单位元。

证明 若不然，以Z表整数集，作$\Gamma=\{Z,+\}$，$M=\{(x,m)\mid x\in I,\ m\in Z\}$，对任意的$(x,m)$，$(y,n)\in M$，任意的$\alpha\in\Gamma$规定：

$$(x,m)=(y,n)\Leftrightarrow x=y,\ m=n.$$

$$(x,m)+(y,n)=(x+y,m+n)$$

$$(x,m)\alpha(y,n)=(x\alpha y+n\alpha x+m\alpha y,m\alpha n)$$

其中$n\alpha x$，$m\alpha y$分别表示x的$(n\alpha)$倍加，y的$(m\alpha)$倍加，可直接验证M为Γ-环，且具有强单位元，即 1 -单位元$(0,1)$。记$I'=\{(x,0)\mid x\in I\}$，则I'是M的理想，且$I\cong I'$。据题设$M=I\oplus J$。故$I\cong M/J$，而M/J有强单位元，从而I也有，此与所设矛盾。定理得证。

Γ-环M能借助其理想中单位元的存在作直和分解，一旦直和分解后，M的单位元和其直和项的诸单位元间的关系如下：

定理 4 若Γ-环$M=M_1\oplus M_2\oplus\cdots\oplus M_k$，则

（1）具有右（左，双侧）单位元$\Leftrightarrow$每一个$M_j(j=1,2,\cdots,k)$均具有右（左，双侧）单位元。

（2）M具有α-右（左，双侧）单位元$\Leftrightarrow$每一个$M_j(j=1,2,\cdots,k)$均具有α-右（左，双侧）单位元。

证明（1） 若M具有右单位元$\sum_{i=1}^{l}$〔α_i,e_i〕，把每一个e_i作分解$e_i=e_{i_1}+e_{i_2}+\cdots+e_{i_k}$其中$e_{ij}\in M_j$（$j=1,2,\cdots,k$）。利用直和性质知对任意的$x\in M_j$有$\sum_{i=1}^{l}x\alpha_ie_{ij}=x$。从而$\sum_{i=1}^{l}$〔$\alpha_i,e_{ij}$〕是

M_j的右单位元．反之，若每一个M_j均具有右单位元$\sum_{i=1}^{l_j}[a_{ij}e_{ij}]$，则可直接验证$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{l_j}[a_{ij}, e_{ij}]$是$M$的右单位元．

（2）只要注意到若每一个M_j均具有α-右单位元e_j，则$e=\sum_{j=1}^{k}e_j$就是M的α-右单位元，其余证明类似（1）． □

注意到上述定理中（2）不能改述为：

（2）′ M具有强右（左，双侧）单位元$\Leftrightarrow$每一个$M_j(j=1,2,\cdots,k)$均具有强右（左，双侧）单位元．

这是由于即使每一个M_j均具有强右单位元$[a_j, e_j]$，则$\sum_{j=1}^{k}[a_j, e_j]$仅是M的右单位元，未必是强右单位元，左或双侧情况也类似．

下面讨论Γ-环M单位元与其矩阵环$M_{m,n}$单位之间的关系，注意$M_{m,n}$是$\Gamma_{n,m}$-环．

定理5 Γ-环M具有右（左）单位元$\Leftrightarrow\Gamma_{n,m}$-环$M_{m,n}$具有右（左）单位元．

证明 “$\Rightarrow$”设M具有右单位元$\sum_{i=1}^{k}[a_i, e_i]$，约定以E_t表示t阶单位矩阵．当$m\geqslant n$时，记$\overline{a_i}=(a_iE_n \quad 0)_{n\times m}$，$\overline{e_i}=\begin{pmatrix} e_iE_n \\ 0\end{pmatrix}_{m\times n}$，则可验证对任意的$\overline{x}\in M_{m,n}$有$\sum_{i=1}^{k}\overline{x}\overline{a_i}\overline{e_i}=\overline{x}$．当$n>m$时，设$n=lm+s\,(0\leqslant s<m)$．若$s=0$，记$\overline{a_{i1}}=\begin{pmatrix} a_iE_m \\ 0\end{pmatrix}_{n\times m}$，$\overline{a_{i2}}=\begin{pmatrix} 0_{m\times m} \\ a_iE_m \\ 0\end{pmatrix}_{n\times m}$，$\cdots$，$\overline{a_{il}}=\begin{pmatrix} 0_{(l-1)m\times m} \\ a_iE_m \\ 0\end{pmatrix}_{n\times m}$，$\overline{e_{i1}}=(e_iE_m \quad 0)_{m\times n}$，$\overline{e_{i2}}=(0_{m\times n} \quad e_iE_m \quad)_{m\times n}$，$\cdots$，$\overline{e_{il}}=(0_{m\times(l-1)m} \quad e_iE_m)_{m\times n}$．则对任意的$\overline{x}\in M_{m,n}$有$\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k}\overline{x}\overline{a_{ij}}\overline{e_{ij}}=\overline{x}$．若$s\neq 0$此时$\overline{a_{il}}=\begin{pmatrix} 0_{(l-1)m\times m} \\ a_iE_m \\ 0\end{pmatrix}$ $e_{il}=(0_{m\times(l-1)m} \quad e_iE_m \quad 0)_{m\times n}$，再记$\overline{a_i'}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_iE_s\end{pmatrix}_{n\times m}$，$\overline{e_i'}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_iE_s\end{pmatrix}_{m\times n}$，同样有$\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k}\overline{x}\overline{a_{ij}}\overline{e_{ij}}+\sum_{i=1}^{k}\overline{x}\overline{a_i'}\overline{e_i'}=\overline{x}$．

“$\Leftarrow$”不难证明对任意一组取定的正整数m，n，若$\Gamma_{n,m}$-环$M_{m,n}$具有右单位元，则Γ-环M必具有右单位元． □

值得一提的是上述定理对强右（左）单位元二个方向的结论都不成立，下例将表明之．

例5 设A为具有乘法单位元e的交换环，取$M=\Gamma=\{A,+\}$，定义$M\times\Gamma\times M\to M$的合成即为环$A$中乘法，则$M$为具有强单位元$[e,e]$的$\Gamma$-环．然在$\Gamma_{2,1}$-环$M_{1,2}$中可直接验证：$M_{1,2}$仅有右单位元$[\begin{pmatrix} e \\ 0\end{pmatrix},(e,0)]+[\begin{pmatrix} 0 \\ e\end{pmatrix},(0,e)]$，而没有强右单位元．且$M_{1,2}$具有强左单位元$[(e,0),\begin{pmatrix} e \\ 0\end{pmatrix}]$．这表明它没有单位元．

现以$\Gamma_{2,1}$-环$M_{1,2}$作为新的Γ'-环M'，它是没有单位元，也没有强右单位元的，考虑其上的矩阵环$\Gamma'_{1,2}$-环$M'_{2,1}$，而这实际上是$(\Gamma_{2,1})_{12}$-环$(M_{1,2})_{2,1}$它具有强单位元，即α-单位元$\overline{e}$，其中$\overline{a}=\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e\end{pmatrix}$，$\overline{e}=\begin{pmatrix} (e & 0) \\ (0 & e)\end{pmatrix}$．

结合环论中有环A特征这一概念（参见〔6〕），记为ch$A$．现在Γ-环中导入这个概念．

定义 5 设M为Γ-环，若M的元素视为加群$\{M, +\}$中元，其阶有一个最大数m存在，则m称为Γ-环M的特征，否则称M的特征为0．

Γ-环M的特征记为ch$M$．

注意到群论中一个熟知的结果：若交换群G中元的最大阶为m，则G中任意元的阶均为m的因子．故若$\mathrm{ch}M=m\neq 0$，则对任意的$x\in M$有$mx=0$．于是容易得出：

命题 1 $\mathrm{ch}M=0\Leftrightarrow$对任意正整数$k$，均存在与$k$有关的$x\in M$使$kx\neq 0$．

$\mathrm{ch}M=m\neq 0\Leftrightarrow$对任意的$x\in M$有$mx=0$，且$m$是具有此性质的最小正整数．

定理 6 若Γ-环M具有右（左）单位元，则$\mathrm{ch}M=\mathrm{ch}R$ ($\mathrm{ch}M=\mathrm{ch}L$)．

证明 设Γ-环M的右单位元为$\sum_{i=1}^{k}[a_i,e_i]$，据定理1知$\sum_{i=1}^{k}[a_i,e_i]$为结合环R的单位元，故ch$R$为$\sum_{i=1}^{k}[a_i,e_i]$在加群$\{R, +\}$中的阶．

如$\mathrm{ch}M=m\neq 0$，则对任意的$x\in M$有$mx=0$．故$m\cdot\sum_{i=1}^{k}[a_i,e_i]=\sum_{i=1}^{k}[a_i,me_i]=\sum_{i=1}^{k}[a_i,0]=$ $=[0,0]$．从而$0\neq\mathrm{ch}R\leqslant m$．若$\mathrm{ch}R=t<m$，则$t\cdot\sum_{i=1}^{k}[a_i,e_i]=\sum_{i=1}^{k}[a_i,te_i]=[0,0]$．故对任意的$x\in M$有$\sum_{i=1}^{k}xa_i(te_i)=\sum_{i=1}^{k}txa_ie_i=0$．然$\sum_{i=1}^{k}[a_i,e_i]$为$M$的右单位元．故$\sum_{i=1}^{k}txa_ie_i=tx$，从而$tx=0$．这与$\mathrm{ch}M=m>t$矛盾，综上知$\mathrm{ch}R=m=\mathrm{ch}M$．

如$\mathrm{ch}M=0$，而$\mathrm{ch}R=t\neq 0$．据上证知此时对任意的$x\in M$有$tx=0$．这与$\mathrm{ch}M=0$矛盾．故$\mathrm{ch}R=0=\mathrm{ch}M$． □

推论 （1）若Γ-环M具有单侧单位元，则ch$M$即其单侧单位元在相应算子环的加群中的阶．

（2）若Γ-环M具有左，右单位元，则$\mathrm{ch}M=\mathrm{ch}R=\mathrm{ch}L$． □

参 考 文 献

〔1〕Kyuno, S., Pacific Jour. Math., 98:2(1982), pp375-379.
〔2〕陈维新，数学研究与评论，8:4(1988)；pp637-642.
〔3〕Kyuno, S., Math. Japonica, 24:2(1979), pp191-193.
〔4〕Booth, G.L., Quaestiones Math., 7:3(1984), pp251-261.
〔5〕陈维新，浙江大学学报，21:5(1987)，pp120-127.
〔6〕方启明，新疆大学学报，4(1985), pp117-118.

On the Unity in Γ-rings

Chen Weixin

Abstract

The unity for multiplication in Γ-rings is more complicated and changeful than that in associative rings. First it is classified to be unity or α-unity (strong unity). Secondly it possesses different properties with that in associative rings. These properties are expounded in this paper. The relation between the unities in Γ-ring M and in its matrix ring $M_{m,n}$ is studied. This relation has feature of Γ-rings too. Lastly the characteristic ch$M$ of Γ-ring M is introduced, Some properties of ch$M$ are proved for M with unities.