第11卷 第3期
1991年8月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.3
Aug. 1991

因式分解广义逆

江声远
(江西师范大学数学系，南昌)

摘　要

在因式分解范畴中定义态射的因式分解广义逆，给出了它的显形式，讨论了其唯一性。应用于范畴 $C^{m\times n}$ 中，态射 $A: m\to n$ 的满秩分解 (A_1, r, A_2) 可刻划 A 的具有指定值域和零空间的 (1,2) 逆，并给出了具有指定值域和零空间的 (1,2) 逆表成因式分解广义逆的充要条件.

若范畴C中每个态射 $\varphi: X\to Y$ 都有一个因式分解 (φ_1, Z, ϕ_2)，即存在对象 Z 和满态射 $\varphi_1: X\to Z$，单态射 $\varphi_2: Z\to Y$，使得 $\varphi=\varphi_1\varphi_2$，则称C是一个因式分解范畴.[1]

定义 设 $(\varphi_1, Z, \varphi_2)$ 是因式分解范畴中态射 φ 的因式分解，设有对象 K, Q 和态射 $i: K\to X$，$\pi: Y\to Q$ 使得 $i\varphi_1$ 和 $\varphi_2\pi$ 是同构，我们把满足

$$\varphi\psi\varphi=\varphi,\quad \psi\varphi\psi=\psi,\quad i\varphi\psi=i,\quad \psi\varphi\pi=\pi \tag{1}$$

的态射 $\psi: Y\to X$ 称为 φ 的由 (i,π) 确定的因式分解广义逆，记成 $\varphi^+_{i,\pi}$.

我们知道，当对象 K，Q 和态射 i,π 符合定义中的要求时，$\varphi^+_{i,\pi}$ 唯一存在（〔1〕，定理2）.

首先，我们给出因式分解广义逆的显形式.

定理1 设 φ, K, Q, i, π 符合定义的要求，则

$$\varphi^+_{i,\pi}=\pi(\varphi_2\pi)^{-1}(i\varphi_1)^{-1}i. \tag{2}$$

证明 直接验证该式右边满足（1）. □

推理1 $\varphi^+_{i,\pi}=\pi(i\varphi\pi)^{-1}i$.

推论2 $\varphi_2\varphi^+_{i,\pi}\varphi_1=1_Z$.

引理1 若 (i,π) 对 φ 的某一因式分解 $(\varphi_1, Z, \varphi_2)$ 使得 $i\varphi_1$ 和 $\varphi_2\pi$ 是同构，则对 φ 的任一分解 $(\varphi'_1, Z', \varphi'_2)$ 都使 $i\varphi'_1$ 和 $\varphi'_2\pi$ 也是同构.

证明 由〔1〕，推论2，Z 和 Z' 同构，有同构态射 $v: Z'\to Z$，使 $\varphi_1=\varphi'_1 v$，$\varphi_2=v^{-1}\varphi'_2$. 从而 $i\varphi'_1 v=i\varphi_1$ 及 $v^{-1}\varphi'_2\pi=\varphi_2\pi$ 都是同构，所以 $i\varphi'_1$ 及 $\varphi'_2\pi$ 都是同构. □

推论3 若 φ 是满（单）态射，则 $\varphi^+_{i,\pi}$ 就是 φ 的左（右）逆.

证明 若 φ 是满的，则 $(\varphi, Y, 1_Y)$ 是 φ 的一个因式分解，由引理1，$1_Y\pi=\pi$ 是同构. 于是 $\varphi^+_{i,\pi}\varphi\pi=\pi$ 蕴含 $\varphi^+_{i,\pi}\varphi=1_Y$. 对称地，可证第二个论断. □

推论4 在有具体因式分解的平衡具体范畴中，由 (i,π) 确定的因式分解广义逆有显

* 1988年11月7日收到.

形式

$$\varphi^{+}_{i,\pi}=\pi(\varphi_{\mathrm{mono}}\pi)^{-1}\varphi^{-1}_{\mathrm{iso}}(i\varphi_{\mathrm{epi}})^{-1}i \quad [2]$$

证明 注意φ有因式分解$(\varphi_{\mathrm{epi}}, X/E_{\varphi}, \varphi_{\mathrm{iso}}\varphi_{\mathrm{mono}})$即知. □

定理 2 若$\varphi: X\to Y$是范畴C的一个同构，$(\varphi_1, Z, \varphi_2)$是它的一个因式分解，那末，对一切使$\varphi_2\pi$和$i\varphi_1$是同构的$(i,\pi)$都有$\varphi^{+}_{i,\pi}=\varphi^{-1}$，这里$\varphi^{-1}$是$\varphi$在C中的逆态射.

证明 同构φ是正则的，而$(1_X, X, 1_X\varphi)$也是φ的因式分解，由引理1，$i1_X=i$及$1_X\varphi\pi=\pi$都是同构，于是π也是同构，所以由唯一性（[1]，定理2）知

$$\varphi^{+}_{i,\pi}=\pi(1_X\varphi\pi)^{-1}(i1_X)^{-1}i=\varphi^{-1}.$$ □

定理 3 设C是范畴，态射$\varphi: X\to Y$有因式分解$(\varphi_1, Z, \varphi_2)$. 若有对象$K_l Q_l (l=1,2)$和态射$i_l: K_l\to X$，$\pi_l: Y\to Q_l$使得$i_l\varphi_1$和$\varphi_2\pi_l$都是同构，则$\varphi^{+}_{i_1,\pi_1}=\varphi^{+}_{i_2,\pi_2}$当且仅当存在同构$v: K_1\to K_2$使$i_1=vi_2$，同构$\mu: Q_2\to Q_1$使$\pi_1=\pi_2\mu$.

证明 若有同构$v: K_1\to K_2$，$\mu: Q_2\to Q_1$使得$i_1=vi_2$，$\pi_1=\pi_2\mu$于是

$$\varphi^{+}_{i_1,\pi_1}=\pi_2\mu(\varphi_2\pi_2\mu)^{-1}(vi_2\varphi_1)^{-1}vi_2=\varphi^{+}_{i_1,\pi_2}.$$

反之，若$\pi_1(\varphi_2\pi_1)^{-1}(i_1\varphi_1)^{-1}i_1=\pi_2(\varphi_2\pi_2)^{-1}(i_2\varphi_1)^{-1}i_2$，将$i_1\varphi_1\varphi_2$左乘此式，得$i_1=(i_1\varphi_1)\cdot(i_2\varphi_1)^{-1}i_2$. 令$v=(i_1\varphi_1)(i_2\varphi_1)^{-1}$ 则v是从K_1到K_2的态射，且有$\eta=(i_2\varphi_1)(i_1\varphi_1)^{-1}$使$v\eta=1_{k_1}$，$\eta v=1_{k_2}$. 故$v$是同构. 对称地，可证得$\mu=(\varphi_2\pi_2)^{-1}(\varphi_2\pi_1)$是$Q_2$到$Q_1$的同构. □

令Δ是一个（可换的）主理想整环，具有一个对合自同构$a\mapsto\bar{a}$. 于是$\Delta^{m\times n}$提供一个带对合的范畴$\mathbf{M}_{\Delta}$. 对象是非负整数0，1，2，…，Hom(m, n)中的态射是Δ上的$m\times n$矩阵，态射的合成是矩阵乘法，对合由$A=(a_{ij})\to A^{*}=(b_{ij})$，$b_{ij}=\bar{a}_{ji}$给出. 同$\mathbf{M}_{\Delta}$的每个态射相联系，有它的行列式秩及不变因子[3][4].

定理 4 令$A: m\to n$是$\mathbf{M}_{\Delta}$的一个态射. 若(A_1, r, A_2)是A的通过它的行列式秩r的一个因式分解，且A的每个不变因子在Δ中均是可逆的，则对应于适合$PA_1=1_r$和$A_2Q=1_r$的每一对态射$P: r\to m$和$Q: n\to r$，存在A的唯一一个因式分解广义逆$A^{+}_{P,Q}$.

证明 因A的行列式秩为r，且每个不变因子在Δ中均可逆，则A_1必为保核收缩，A_2必为余保核收缩（[4]，引理5）. 于是有$P: r\to m$使$PA_1=1_r$和$Q: n\to r$使$A_2Q=1_r$. 据[1]、定理2，$A^{+}_{P,Q}$唯一存在. □

将定理3应用于范畴$\mathbf{M}_{\Delta}$，便得到下述定理.

定理 5 设$A: m\to n$是$\mathbf{M}_{\Delta}$的一个态射，A的行列式秩为r，(A_1, r, A_2)是A的通过r的一个因式分解，$P: r\to m$和$P_1: r\to m$使得$PA_1: r\to r$和$P_1A_1: r\to r$是同构；$Q: n\to r$和$Q_1: n\to r$使得$A_2Q: r\to r$和$A_2Q_1: r\to r$是同构. 那末，$A^{+}_{P,Q}=A^{+}_{P_1,Q_1}$当且仅当有同构$M: r\to r$及$N: r\to r$使得$P_1=MP$，$Q_1=QN$. □

以下总是令$\Delta=\mathbf{C}$（复数域）.

对于范畴$\mathbf{M}_{\mathbf{C}}=\mathbf{C}^{m\times n}$，每个$A\in\mathbf{C}^{m\times n}$总有满秩分解$A=A_1A_2$，$A_1\in\mathbf{C}^{m\times r}$，$A_2\in\mathbf{C}^{r\times n}$. 任一个列满秩矩阵$A_1$总可经过适当的行变换使前$r$行为$r$阶满秩矩阵$\widetilde{A}_1$，即有适当的$m$阶可逆矩阵$E$使

$$(I_r \quad 0)EA_1=(I_r \quad 0)\begin{bmatrix}\widetilde{A}_1\\ *\end{bmatrix}=A_1.$$

令$P=(I_r \quad 0)E$，即知PA_1可逆. 对于行满秩矩阵A_2，可对称地令$Q=F\begin{pmatrix}I_r\\0\end{pmatrix}$，$F$是适当

的 n 阶可逆矩阵，使 A_2Q 可逆. 所以，据定理1知每个 $A\in \mathbf{C}^{m\times n}$ 都有唯一的由（P,Q）确定的因式分解广义逆，它满足方程

$$AXA=A, \quad XAX=X, \quad PAX=P, \quad XAQ=Q. \tag{1'}$$

将它记成 $A^+_{P,Q}$，而且

$$A^+_{P,Q}=Q(A_2Q)^{-1}(PA_1)^{-1}P, \tag{2'}$$

这里 P,Q 分别是使 A_2Q 和 PA_1 可逆的任意 $r\times m$ 及 $n\times r$ 矩阵.

作为应用，我们可以选择 P,Q，用由（P,Q）确定的因式分解广义逆来刻划一些具有指定值域与零空间的广义逆[5],[6].

先给出两类特殊矩阵与它们的因式分解广义逆的关系.

命题1 若 $E\in \mathbf{C}^{n\times n}_r$, $E^2=E$, $E=E_1E_2$ 是满秩分解，则

$$E=E^+_{E_2,E_1}.$$

证明 由 $E^2=E$ 知 $E_2E_1=I_r$. 于是 $E_2EE=E_2$, $EEE_1=E_1$. 而且 E_2E_1 当然可逆. □

注记 若M，N是任意 r 阶满秩矩阵，由定理5, $E=E^+_{ME_2,E_1N}$. 类似于此，以下诸结论中，均可对相应的 $P(Q)$ 左（右）乘M（N）.

命题2 若 $A\in \mathbf{C}^{n\times n}_r$, $A^2=I_n$, 则对一切使 PA_1 和 A_2Q 可逆的 $P\in \mathbf{C}^{r\times n}$, $Q\in \mathbf{C}^{n\times r}$，总有 $A=A^+_{P,Q}$.

证明 据定理2, $A^+_{P,Q}=A^{-1}=A$. □

定理6 设 $A\in \mathbf{C}^{m\times n}_r$, $A=A_1A_2$ 是满秩分解，则A的Moore-Penrose 逆

$$A^+=A^+_{A_1^*,A_2^*}.$$

证明 据MacDuffee的结论（[5]，定理1.5）$A^+=A_2^*(A_1^*A_1A_2A_2^*)^{-1}A_1^*$，容易验证 $A_1^*AA^+=A_1^*$, $A^+AA_2^*=A_2^*$. 而且$A_1^*A_1$, $A_2A_2^*$ 均可逆. □

推论 A 的 Moore-Penross 逆是矩阵方程组

$$AXA=A, \quad XAX=X, \quad A_1^*AX=A_1^*, \quad XAA_2^*=A_2^*$$

的唯一解. □

这样，我们从另一角度重新得到Penrose 的熟知的结论[7].

定理7 设 $A\in \mathbf{C}^{m\times n}_r$, $A=A_1A_2$ 是满秩分解，$W\in \mathbf{C}^{m\times m}$ 和 $U\in \mathbf{C}^{n\times n}$ 是正定矩阵，则A的的加权广义逆.

$$A^{(1,2)}_{(W,U)}=A^+_{A_1^*W,U^{-1}A_2^*}.$$

证明 我们知道 $A^{(1,2)}_{(W,U)}=U^{-1}A_2^*(A_1^*WA_1A_2U^{-1}A_2^*)^{-1}A_1^*W$（[5],Ex.3.45）. 注意到 $A_1^*WA_1=(W^{1/2}A_1)^*(W^{1/2}A_1)$，知秩 $A_1^*WA_1=$秩 $W^{1/2}A_1=$秩 $A_1=r$. 于是 $A_1^*WA_1$ 是满秩矩阵；同理，$A_2U^{-1}A_2^*$ 也是满秩矩阵. 这样，$A_1^*WAA^{(1,2)}_{(W,U)}=A_1^*W$, $A^{(1,2)}_{(W,U)}AU^{-1}A_2^*=U^{-1}A_2^*$. □

推论 A,A_1,A_2,W,U 如定理，A的加权广义逆 $A^{(1,2)}_{(W,U)}$ 是矩阵方程组

$$AXA=A, \quad XAX=X, \quad A_1^*WAX=A_1^*W, \quad XAU^{-1}A_2^*=U^{-1}A_2^*$$

的唯一解. □

定理8 设 $A\in \mathbf{C}^{n\times n}_r$, index $A=1$, $A=A_1A_2$ 是满秩分解，则A的群逆

$$A^{\#}=A^+_{A_2,A_1}.$$

证明 据 Cline 的结论（〔5〕, Ex.2.37）$A^{\#}=A_1(A_2A_1)^{-2}A_2$. 有 $A_2AA^{\#}=A_2$, $A^{\#}AA_1=A_1$. □

推论 A, A_1, A_2 如定理，A 的群逆 $A^{\#}$ 是矩阵方程组

$$AXA=A,\quad XAX=X,\quad A_2AX=A_2,\quad XAA_1=A_1$$

的唯一解. □

设 $A=A_1A_2$ 是满秩分解，A_1 的左逆 A_1^L 及 A_2 的右逆 A_2^R 有些有趣的性质.

引理 2 $R(A_2^R)=R(A_2^RA_2)=R(A_2^RA_1^L)$, $\quad N(A_1^L)=N(A_1A_1^L)=N(A_2^RA_1^L)$.

证明 只须注意到 $A_2^R=A_2^RA_2A_2^R$, $A_2^R=A_2^RA_1^LA_1$, $A_1^L=A_1^LA_1A_1^L$, $A_1^L=A_2A_2^RA_1^L$. □

引理 3 $N(A)=N(A_2)=N(A_2^RA_2)$, $\quad R(A)=R(A_1)=R(A_1A_1^L)$.

证明 因 $A_2=A_1^LA$, $A_2=A_2A_2^RA_2$, $A_1=AA_2^R$, $A_1=A_1A_1^LA_1$ □

引理 4 $\mathbf{C}^n=R(A_2^R)\oplus N(A)$, $\qquad \mathbf{C}^m=N(A_1^L)\oplus R(A)$.

证明 $x=A_2^RA_2x+(x-A_2^RA_2x)$, $\quad \forall x\in\mathbf{C}^n$. 于是有直和分解 $\mathbf{C}^n=R(A_2^RA_2)\oplus N(A_2)$. 据引理 2 和3，即得 $\mathbf{C}^n=R(A_2^R)\oplus N(A)$. 后一直和分解式可类似地证得. □

命题 3
$$A_1A_1^L=P_{R(A),N(A_1^L)}=(A_1A_1^L)^+_{A_1^L,A_1},$$
$$A_2^RA_2=P_{R(A_2^R),N(A)}=(A_2^RA_2)^+_{A_2^R,A_2}.$$

证明 $A_1A_1^L$ 和 $A_2^RA_2$ 都是幂等的，从而是射影的，其值域与零空间从引理 2 和 3 可知. 又因 $A_1A_1^L$ 和 A 有相同的秩，故 $A_1A_1^L$ 是满秩分解；同理 $A_2^RA_2$ 也是满秩分解. 据命题 1 即得上述因式分解广义逆. □

推论
$$A_2^*A_2^{*L}=P_{R(A^*),N(A_2^{*L})}=(A_2^*A_2^{*L})^+_{A_2^{*L},A_2^*},$$
$$A_1^{*R}A_2^*=P_{R(A_1^{*R}),N(A^*)}=(A_1^{*R}A_2^*)^+_{A_1^{*R},A_1^*}.$$

证明 因 $A=A_1A_2$ 是满秩分解，则 $A^*=A_2^*A_1^*$ 也是满秩分解. □

定理 9 设 $A\in\mathbf{C}^{m\times n}$, $A=A_1A_2$ 是满秩分解，则

$$A_2^RA_1^L=A^{(1,2)}_{R(A_2^R),N(A_1^L)}=A^+_{A_1^L,A_2^R}.$$

证明 显然 $A_2^RA_1^L\in A\{1,2\}$. 由引理 2 和 4 知等式前一部分成立. 又 $A_1^LAA_2^RA_1^L=A_1^L$, $A_2^RA_1^LAA_2^R=A_2^R$. 同时 $A_1^LA_1$ 和 $A_2A_2^R$ 均为满秩矩阵. □

推论 $A_1^{*R}A_2^{*L}=A^{*(1,2)}_{R(A_1^{*R}),N(A_2^{*L})}=A^*_{A_2^{*L},A_1^{*R}}$

我们熟知，$A^+=A^{(1,2)}_{R(A^*),N(A^*)}$, $A^{\#}=A^{(1,2)}_{R(A),N(A)}$ 和 $A^{(1,2)}_{(W,U)}=A^{(1,2)}_{U^{-1}N(A)^2,W^{-1}R(A)^L}$〔5〕, 可见，定理6、7、8、9 都是用适当的因式分解广义逆刻划了某些有指定值域和零空间的 $\{1,2\}$ − 逆. 一般地，我们有以下结论.

定理 10 设 $A\in\mathbf{C}_r^{m\times n}$, $A=A_1A_2$ 是满秩分解，$R(A)\oplus S=\mathbf{C}^m$, $N(A)\oplus T=\mathbf{C}^n$, $P\in\mathbf{C}^{r\times m}$, $Q\in\mathbf{C}^{n\times r}$, 那末

$$A^{(1,2)}_{T,S}=A^+_{P,Q}$$

当且仅当 $N(P)\supset S$, $R(Q)\subset T$, PA_1 和 A_2Q 均为 r 阶满秩矩阵.

证明 若 $A^{(1,2)}_{T,S}=A_{P,Q}$, 则 $PAA^{(1,2)}_{T,S}=P$, $A^{(1,2)}_{T,S}AQ=Q$. 由于 $AA^{(1,2)}_{T,S}=P_{R(A),S}$, $A^{(1,2)}_{T,S}A=P_{T,N(A)}$（〔5〕, Ex.2.31）, 所以 $PP_{R(A),S}=P$, $P_{T,N(A)}Q=Q$. 这就等价于 $N(P)\supset S$, $R(Q)\subset T$（〔5〕, Ex.2.23）. 反之，若 PA_1 及 A_2Q 是满秩的，则 $P^+_{P,Q}$ 有意义. 如果 $N(P)\supset S$,

$R(Q) \subset T$ 就有 $PP_{R(A),S} = P$，$P_{T,N(A)}Q = Q$. 由于 $AA_{T,S}^{(1,2)} = P_{R(A),S}$，$A_{T,S}^{(1,2)}A = P_{T,N(A)}$. 这就说明 $A_{T,S}^{(1,2)}$ 满足矩阵方程组（1′）. 由 $A_{P,Q}^{+}$ 的唯一性知 $A_{T,S}^{(1,2)} = A_{P,Q}^{+}$. □

参 考 文 献

〔1〕D. L. Davis and D. W. Robinson, Linear Algebra and Appl. 5(1972), 319—328.

〔2〕江声远，数学杂志，Vol. 8, No. 1, 1988.

〔3〕N. Jacobson, Basic Algebra 1. Freeman, San Francisco, 1974.

〔4〕R. Puystjens and D. W. Robinson, Linear Algebra and Appl. 40(1981), 129—141.

〔5〕A. Ben-Israel and T. N. E. Greville, Generalized Inverses: Theory and Applications, Wiley, New York, 1974,

〔6〕S. L. Campbell and C. D. Meyer. jr., Generalized Inverses of Linear Transformations, Pitman, London, 1979.

〔7〕R. Penrose, Proc. Camb. Philos. Soc. 51 (1955), 406—413.

Generalized Inverses with Factorization

Jiang Shengyuan

(Jiangxi Normal University, Nanchang)

Abstract

In this paper we defined the generalized inverse with factorization of morphism in a category with factorization, gave out its explict formulas, discussed its uniqueness. Applying to the category $C^{m \times n}$, we use the full-rank factorization of matrix A to characterize the $\{1,2\}$-inverse of A with prescribed range and null space and get a necessary and sufficient condition for a $\{1,2\}$-inverse with prescribed range and null space can be expressed as a generalized inverse with factorization.