第11卷 第3期
1991年8月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAT RESEARCR AND EXPOSITION
Vol.11 No.3
Aug, 1991

布尔矩阵极小范数g—逆的一个充要条件

柳柏濂
(华南师范大学数学系，广州)

记B_{mn}为$m\times n$布尔矩阵的集合.

定义 设$A\in B_{mn}$, $G\in B_{nm}$, 如果$A=AGA$且$GA=(GA)^T$, 则G叫做A的极小范数g-逆，记为A_m^-；如果$A=AGA$且$AG=(AG)^T$, 则G叫做A的最小二乘g-逆，记为A_l^-.

本文引进一类相伴矩阵A_m, 从而给出布尔矩阵极小范数（和最小二乘）g-逆的一个充要条件，由此可把极小范数（最小二乘）g-逆存在性的判断与具体构造统一起来。

定义 设$A\in B_{mn}$, 若

$$g_{ij}=\begin{cases}0 & \exists a_{xi}=0\text{且}a_{xy}=a_{jy}=1,\\ 1 & \text{其它},\end{cases}$$

则$A_m=(g_{ij})$称为A的相伴阵. 易见，

$$g_{ij}=\prod_{x,y}[1-a_{xy}a_{jy}(1-a_{xi})],$$

这里“-”为通常算术的减法.

由定义，不难从转置矩阵A_m^T作出A_m.

定理1 A_m^-存在，当且仅当$A=AA^TA_m^T$.

系1 若A_m^-存在，A_m是A最大的极小范数g-逆.

系2 若$A_m^T\geqslant A$, 则A_m是A的极小范数g-逆.

定义 记$A=(a_{i,j})$, $A_m^T=(g_{i,j}^T)$. 若$a_{i,j}=1$但$g_{ij}^T=0$, 则$a_{i,j}$称为A的相伴1；若$a_{ij}=g_{i,j}^T=1$, 则$a_{i,j}$称为A的重1.

系3 若在A的相伴1所在的列中至少有一个重1，则A_m是A的极小范数g-逆.

系4 若在A的每一列至少有一个重1, 则A_m是A的极小范数g-逆.

定义 布尔向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\beta=(b_1,b_2\cdots b_n)$, $\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$, $\alpha\otimes\beta=(a_1b_1,a_2b_2,\cdots,a_nb_n)$.

定理2 设α_i是A的第i个行向量，β_i是A_m的第i个列向量，$\forall\{t,i_1,i_2,\cdots,i_k\}\subset\{1,2,\cdots,n\}$ 若$\alpha_t=\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}+\cdots+\alpha_{i_k}$, 则$\beta_t=\beta_{i_1}\otimes\beta_{i_2}\cdots\otimes\beta_{i_k}$.

系 若$\alpha_t=\alpha_s$, 则$\beta_t=\beta_s$.

上述结论对A的列向量与A_m的行向量仍成立.

定理3 若A_m是A的极小范数g-逆且行秩$\rho_r(A_m)=\rho_r(A)$, 则A是A_m的一个最小二乘g-逆.

进一步，易知：

若$(A^T)_m$是A^T的一个极小范数g-逆，则$((A^T)_m)^T$是A的一个最小二乘g-逆且是最大的最小二乘g-逆.

*1989年9月21日收到.