第11卷　第3期　　数学研究与评论　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Vol.11 No.3
1991年8月　　Aug. 1991

集值映射族的紧性*

方嘉琳
（辽宁师大数学系，大连）

映射族的紧性在分析学中的重要性是众所周知的．如在微分方程、积分方程、变分法、保形映射等理论中都曾用到．几十年来许多人将它推广为各种一般形式[6]．由于映射族的种类不同，映射空间的拓扑结构不同而形式各异．本文主要就集值映射族在紧开拓扑下讨论一种特殊形式．

设 $\{Y_x: x\in X\}$ 是一族非空集，$\{Y_x: x\in X\}$ 的$\mathfrak{M}$积 $\prod\{\mathscr{A}(Y_x): x\in X\}$ 是使 $\forall x\in X$，$F(x)\subset Y_x$ 的所有集值映射 $F: X\to\bigcup\limits_{x\in X}Y_x$ 的全体．特别地，当 $\forall x\in X$ 都有 $Y_x=Y$ 成立时，X 到 Y 的集值映射的全体写作 $M(X,Y)$．当 X，Y 为拓扑空间，用 $M_o(X,Y)$，$M_A(X,Y)$，$M_C(X,Y)$ 分别表示空间 Z 到空间 Y 的点紧、点闭、连续的集值映射的全体．为了行文方便约定用 $\Sigma(A)$ 表示 A 的开邻域系，$F^+(B)=\{x: F(x)\subset B\}$，$F^-(B)=\{x: F(x)\cap B\neq\phi\}$，$(x,U)=\{F: F(x)\subset U\}$，$)x,U(=\{F: F(x)\cap U\neq\phi\}$，$(A,B)=\{F: F(A)\subset B\}$，其中，$F(A)=\bigcup\{F(x): x\in A\}$，$)A,B(=\{F:$ 若 $x\in A$，则 $F(x)\cap B\neq\phi\}$．$\mathscr{F}[x]=\bigcup\{F(x): F\in\mathscr{F}\}$．

显然，$F\in(A,B)\Longleftrightarrow A\subset F^+(B)$，$F\in)A,B(\Longleftrightarrow A\subset F^-(B)$．

2^X 表示 X 中非空闭集全体关于 Vietori 拓扑构成的超空间，$\mathscr{K}[x]$ 表示 X 中非空紧集全体关于 Vietori 拓扑构成的超空间。

$M(X,Y)$ 上的拓扑 $\mathscr{R}$ 称为点开拓扑 $\Longleftrightarrow\mathscr{R}$ 是由 $\{(x,U),)x,U(: x\in X, U$ 为 Y 中开集$\}$ 为子基生成的拓扑．

$M(X,Y)$ 上的拓扑 $\mathscr{C}$ 称为紧开拓扑 $\Longleftrightarrow\mathscr{C}$ 是由 $\{(K,U),)K,U(: K$ 为 X 的紧集，U 为 Y 的开集$\}$ 为子基生成的拓扑．

命题1　若 Y 为紧空间，$\mathscr{F}$ 为 $M_A(X,Y)$ 的 $\mathscr{R}$ 闭子集，则 $(\mathscr{F},\mathscr{R})$ 为紧空间．

证明　因 2^Y 为紧空间[4]，由 Tychonoff 定理知 $\Pi 2^Y$ 为紧空间，故 $M_A(X,Y)$ 为 $\mathscr{R}$ 空空间，从而知 $(\mathscr{F},\mathscr{R})$ 为紧空间．

命题2　若 Y 为紧空间，则 $M_O(X,Y)$ 关于 $\mathscr{R}$ 为紧空间．．．

证明　因 $M_O(X,Y)=\Pi\mathscr{K}(Y)$，而 $\mathscr{K}(Y)$ 为紧空间[4]，故 $M_o(X,Y)$ 为关于 $\mathscr{R}$ 的紧空间．

引理1　设 Y 为正则空间，$\mathscr{F}\subset M_A(X,Y)$，则 $(\mathscr{F},\mathscr{R})$ 是Hausdorff 空间．

* 1989年10月24日收到．

实际上，设 $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$，$F_1 \neq F_2$，则$\exists\, x \in X$，使 $F_1(x) \neq F_2(x)$．不妨设 $y \in F_1(x) \setminus F_2(x)$．故有$V_1 \in \Sigma(y)$，$V_2 \in \Sigma(F_2(x))$ 使 $V_1 \cap V_2 = \phi$．则 $F_1 \in)x, V_1($，$F_2 \in (x, V_2)$ 而 $)x, V_1($ $\cap (x, V_2) = \phi$．

引理 2 设$\mathscr{F} \subset M_A(X,Y)$，$\overline{\mathscr{F}}$表示$\mathscr{F}$在（$M_A(X,Y)$，$\mathscr{R}$）中的闭包，则$\overline{\mathscr{F}} \subset \Pi\{2^{\overline{\mathscr{F}[x]}}: x \in X\}$．

实际上，设 $F \in \overline{\mathscr{F}}$，$\forall\, x \in X$，$\forall\, y \in F(x)$，$\forall\, V \in \Sigma(y)$，必有$)x, V(\in \Sigma(F)$．故$)x, V(\cap \mathscr{F} \neq \phi$．即 $\mathscr{F}[x] \cap V \neq \phi$．故 $F(x) \subset \overline{\mathscr{F}[x]}$．

命题 3 设 Y 为T_1 正则空间，$\mathscr{F} \subset M_A(X,Y)$，则（$\mathscr{F}$，$\mathscr{R}$）是紧的$\Longleftrightarrow$$\mathscr{F}$是$\mathscr{R}$闭的且对对$\forall\, x \in X$，$\mathscr{F}[x]$有紧闭包．

证明 $\mathscr{F}$是$\mathscr{R}$紧集，由引理 1 $\mathscr{F}$ 为$\mathscr{R}$ 闭集．又因$\mathscr{F}[x]$为紧集，故为闭集，$\mathscr{F}[x]$即为其紧闭包．

反之，$\Pi\{2^{[\mathscr{F}[x]]}: x \in X\}$ 为紧集，由引理 2 $\overline{\mathscr{F}} \subset \Pi\{2^{\overline{[\mathscr{F}[x]]}}: x \in X\}$，故（$\overline{\mathscr{F}}$，$\mathscr{R}$）是紧集．

Mancuso〔1〕有下述定理．

定理 4.5 设X为T_2，K空间．Y为正规T_2空间，$\mathfrak{M} = \{F \in M(X,Y): F$ 是连续且点紧的$\}$ 具有紧开拓扑，则点状族$\mathscr{F} \subset \mathfrak{M}$ 是紧的$\Longleftrightarrow$

a．$\mathscr{F}$ 在$\mathfrak{M}$中是闭集；

b．$\forall\, x \in X$，$\mathscr{F}[x]$是紧集；

c．$\mathscr{F}$的任一$\mathscr{C}$闭子集$\mathscr{F}_o$，任一开集$G \subset Y$，$\cap\{F^+(G): F \in \mathscr{F}_o\}$ 及 $\cap\{F^-(G): F \in \mathscr{F}_o\}$ 皆为开集．

其中点状族的定义为：

设$\mathscr{F} \subset M_A(X,Y)$，$\mathscr{F}$ 为$\mathscr{F}$ 在$M_A(X,Y)$中的$\mathscr{R}$闭包，则$\mathscr{F}$称为点状的，如果当$H \in \mathscr{F}$，且$H(x_o) \subset \mathscr{F}[x_o]$，则$\exists$ $F \in \mathscr{F}$，使 $F(x_0) = H(x_o)$．

为改进本定理，先列出下述定义和定理．

定义 $M(X,Y)$的子集$\mathscr{F}$是点态有界的$\Longleftrightarrow$$\forall\, x \in X$，$\mathscr{F}[x]$在$Y$中有紧闭包[2]．

定义 $M(X,Y)$的子集$\mathscr{F}$是Tychonoff 的$\Longleftrightarrow$$\mathscr{F}$的任一点态有界子集$\mathscr{F}'$，$\mathscr{F} \cap \Pi\{\mathscr{A}(\mathscr{F}'[x]): x \in X\}$ 是$\mathscr{R}$紧的．[2]

定义 $\mathscr{F} \subset M(X,Y)$具有性质$\alpha$$\Longleftrightarrow$$\mathscr{F}$的任一$\mathscr{C}$闭子集$\mathscr{F}_o$，任一开集$G \subset Y$，$\cap\{F^+(G): F \in \mathscr{F}_o\}$ 及$\cap\{F^-(G): F \in \mathscr{F}_o\}$ 皆为开集．

引理 1 上半连续点紧映射是保紧映射[5]．

引理 2 Y的任一开集G，$\cap\{F^+(G): F \in \mathscr{F}\}$ 及$\cap\{F^-(G): F \in \mathscr{F}\}$ 皆为开集$\Longleftrightarrow$$Y$的任一闭集$H$，$\cup\{F^+(H): F \in \mathscr{F}\}$ 及$\cup\{F^-(H): F \in \mathscr{F}\}$ 皆为闭集[3]．

引理 3 $M(X,Y)$为Tychonoff 的[2]．

引理 4 若 $\mathscr{F}_o$是Tychonoff 集$\mathscr{F}$的点态有界子集，则 $\mathscr{F}_0$的$\mathscr{R}$闭包是紧集[2]．

定理 设X为K空间，Y为T_1正则空间，$\mathscr{F} \subset M_o(X,Y) \cap M_C(X,Y)$，则（$\mathscr{F}$，$\mathscr{C}$）是紧的$\Longleftrightarrow$$\mathscr{F}$满足下列条件：

a．$\mathscr{F}$ 是$M_o(X,Y)$的$\mathscr{C}$闭子集；

b．$\forall\, x \in X$，$\mathscr{F}[x]$ 是Y 的紧子集；

c. $\mathscr{F}$ 具有性质a.

证明 设$\mathscr{F}$满足条件，证明$\mathscr{F}$是$\mathscr{C}$紧的.

设$\overline{\mathscr{F}}$为$\mathscr{F}$在$M_o(X,Y)$中的$\mathscr{R}$闭包，由引理3及引理4知$\overline{\mathscr{F}}$是$\mathscr{R}$紧集. 设$\widetilde{\mathscr{F}}$为$\mathscr{F}$在$M_o(X,Y)$中的$\mathscr{C}$闭包. 因$\mathscr{C}\geqslant\mathscr{R}$，故$\widetilde{\mathscr{F}}\subset\mathscr{F}$.

$\forall F_o\in\mathscr{F}$，$\forall x_o\in X$，设$V_o$为$Y$中任意开集，若$F_o(x_o)\cap V_o\neq\phi$，取$y\in F_o(x_o)\cap V_0$，取$G$，$V\in\Sigma(y)$，满足$y\in G\subset\overline{G}\subset\overline{V}\subset V\subset V_o$. 令$\mathscr{F}_o=)x_o,\overline{G}(\cap\mathscr{F}$. 则$\mathscr{F}_o$是$\mathscr{C}$拓扑下$\mathscr{F}$的闭子集. 令$U=\cap\{H^{-1}(V):H\in\mathscr{F}_o\}$，则$U\in\Sigma(x_o)$. 若$z\in U$，使$F_o(z)\cap\overline{V}=\phi$，则$F_o(z)\subset\subset Y-\overline{V}$. 有开集$W$，使$F_o(z)\subset W\subset\overline{W}\subset Y-\overline{V}$. 令$\mathfrak{M}=M_o(X,Y)\cap(z,W)\cap)x_o,\overline{G}($，则$\mathfrak{M}$是$F_o$在$M_o(X,Y)$中$\mathscr{R}$邻域. 故存在$F'\in\mathfrak{M}\cap\mathscr{F}=\mathfrak{M}\cap\mathscr{F}_o$. 即$F'\in(z,W)$且$F'\in)x_o,\overline{G}($. 从而$F'(z)\cap V\neq\phi$. 于是$W\cap V\supset F'(z)\cap V\neq\phi$. 矛盾. 故当$z\in U$时必有$F_o(z)\cap V\neq\phi$. 于是$F_o$是下半连续映射[7].

再设V_o是Y中任意开集，$F_o(x_o)\subset V_0$，则有G，$V\in\Sigma(F_o(x_0))$，使$F_o(x_o)\subset G\subset\overline{G}\subset V\subset\overline{V}\subset V_o$. 令$\mathscr{F}_o=(x_o,\overline{G})\cap\mathscr{F}$，则$\mathscr{F}_o$为$\mathscr{F}$中$\mathscr{C}$闭集. 令$U=\cap\{H^{+}(V):H\in\mathscr{F}_o\}$，则$U\in\Sigma(x_o)$. $\forall z\in U$，$\forall z\in F_o(z)$，$\forall W\in\Sigma(y)$，令$\mathfrak{M}=M_o(X,Y)\cap(x_o,G)\cap)z,W($. 显然$\mathfrak{M}$是$F_o$在$M_o(X,Y)$中的$\mathscr{R}$邻域. 故有$F'\in\mathfrak{M}\cap\mathscr{F}$. 即$F'\in\mathscr{F}_o$且$F'(z)\subset V$，于是$V\cap W\neq\phi$. 从而$y\in\overline{V}$，故$F_o(z)\subset\overline{V}\subset V_o$. 于是$F_o(U)\subset\overline{V}\subset V_o$. 即$F_o$是上半连续映射[7]. 故$F_o$是点紧连续映射.

今证明$F_o\in\mathscr{F}$. 不失证明的一般性，就F_o的$\mathscr{C}$邻域$\mathscr{K}=\bigcap_{i=1}^{n}[(K_i,U_i)\cap)K_i,U'_i(]$讨论之.

对$\forall_i$及$\forall x\in K_i$，存在开集$V'_{i_x}\subset Y$使$\overline{V}'_{i_x}\subset U'_i$且$F_o(x)\cap V'_{i_x}\neq\phi$，也存在开集$V_i\subset Y$使$F(K_i)\subset V_i\subset\overline{V}_i\subset U_i$. 令$\mathscr{K}_x=M_o(X,Y)\cap(x,\overline{V}_i)\cap)x,\overline{V}'_{i_x}($，则$\mathscr{H}_x$为$F_o$在$M_o(X,Y)$中$\mathscr{C}$闭邻域. 令$\mathscr{F}_x=\mathscr{H}_x\cap\overline{\mathscr{F}}$. 则$\mathscr{F}_x$是非空$\mathscr{C}$闭子集. 令$U_x=[\cap\{F^{+}(U_i):F\in\mathscr{F}_x\}]\cap[\cap\{\{F^{-}(U'_i):F\in\mathscr{F}_x\}]$，则$U_x\in\Sigma(x)$. 故$\cup\{U_x:x\in K_i\}\supset K_i$. 故有有限个$U_x,\cdots,U_{x^i_{k_i}}$，使$\cup\{U_{xi_j}:j=1,2,\cdots,K_i\}\supset K_i$. 对应$x^i_j$的$F_o$的邻域为$\mathscr{K}_{x_j}$，则$\mathfrak{M}=\cap\{\{\cap\mathscr{K}_{x_j}:j=1,\cdots\cdots,K_i\}:i=1,2,\cdots,n\}$是$F_o$的$\mathscr{R}$邻域. 因$F_o\in\overline{\mathscr{F}}$，故有$F'\in\mathscr{F}$. 设$x\in K_i$，$\exists j(1\leqslant j\leqslant K_i)$使$x\in U_x\subset\cap\{F^{-}(U'_i):F\in\mathscr{F}_x\}$. 于是对任$F\in\mathscr{F}_x$，$F(x)\cap U'_i\neq\phi$. 因$F'\in\mathfrak{M}\cap\mathscr{F}\subset\subset\mathscr{H}_{x^i_j}\cap\overline{\mathscr{F}}=\mathscr{F}_{x^i_j}$，故$F'\in)x,U'_i($. 因$x\in K_i$是任意的，故$F'\in)K_i,U'_i($. 另一方面，$x\in U_x\subset\cap\{F^{+}(U_i):F\in\mathscr{F}_x\}$，则$\forall F\in\mathscr{F}_x$有$F(x)\subset U_i$. 特别地，$F'(x)\subset U_i$. 即$F'\in(x,U_i)$. 故$F'\in(K_i,U_i)$. 即$F'$在$F_o$的$\mathscr{C}$邻域$\mathscr{K}$中. 故$F_o\in\mathscr{F}$. 从而$\overline{\mathscr{F}}=\mathscr{F}$. 因$\overline{\mathscr{F}}$是$\mathscr{R}$紧集，故$\overline{\mathscr{F}}$是$\mathscr{C}$紧集，因$\mathscr{F}$是$\mathscr{C}$闭集，故$\mathscr{F}$是$\mathscr{C}$紧集.

反之，设$\mathscr{F}$是$\mathscr{C}$紧集，由引理1 $\mathscr{F}$关于$\mathscr{C}$拓扑也是Hausdorff 空间，故$\mathscr{F}$是$\mathscr{C}$闭集，a 成立.

观察使$\varphi_x(F)=F(x)$的映射$\varphi_x:M_o(X,Y)\to Y$. 则$\varphi_x(\mathscr{F})=\mathscr{F}[x]$. $\forall U\in\Sigma(F(x))$，$\exists(x,U)\in\Sigma(F)$，当$H\in(x,U)$时，$\varphi_x(H)=H(x)\subset U$. 故$\varphi_x$是上半连续映射. 因$\varphi_x$是点紧的，故$\mathscr{F}[x]$是紧集[5]. b 成立.

设K为X的任一闭紧集，W为Y的任一闭集，令$S=[\cup\{F^{+}(W):F\in\mathscr{F}\}]\cap K$，$S'=[\cup\{F^{-}(W):F\in\mathscr{F}\}]\cap K$. 往证$S$及$S'$皆为闭集.

因$S\subset K$，若$x\overline{\in}S$，则$x\notin\cup\{F^{+}(W):F\in\mathscr{F}\}$. 即$\forall F\in\mathscr{F}$，$F(x)\cap(Y-W)\neq\phi$. 故

$\exists U_F \in \Sigma(x)$，当$y \in U_F$时，$F(y) \cap (Y-W) \neq \phi$．令$K_F = U_F \cap K$，则$K_F$为紧集．令$\mathfrak{M}_F =)K_F, Y-W(\cap \mathscr{G}$．则$\mathfrak{M}_F \in \Sigma(F)$，且$\bigcup \{\mathfrak{M}_F : F \in \mathscr{G}\} \supset \mathscr{G}$．因$\mathscr{G}$是$\mathscr{C}$紧集，故有有限覆盖$\{ \mathfrak{M}_{F_i} : i = 1, 2, \cdots, n\}$．令$K_0 = \bigcap_{i=1}^{n} K_{F_i} = \bigcap_{i=1}^{n} [U_{F_i} \cap K]$，则$K_0$为$x$在$K$中邻域．即若$H \in \mathscr{G}$，$z \in K_0$，则$H \in)z, Y-W($．故$K_o \cap [U\{F^+(W) : F \in \mathscr{G}\}] = \phi$．于是$K_o \cap S = \phi$． 令$U_o = \bigcap U_{F_i}$，则$U_o \in \Sigma(x)$，$U_o \cap K = K_0$，$U_o \cap S = \phi$．故$x \notin \overline{S}$．从而$S$为闭集．

同理，若$x \notin S'$，则$\forall F \in \mathscr{G}$，必有$F \in (x, Y-W)$．故有$U_F$使$F(x) \subset U_F \subset \overline{U}_F \subset Y-W$．故存在$V_F \in \Sigma(x)$，使$F(V_F) \subset U_F$．设$K_F = V_F \cap K$，则$K_F$为紧集．令$\mathfrak{M}_F = (K_F, Y-W) \cap \mathscr{G}$，由〔7〕有$F(V_F) \subset \overline{F(V_F)} \subset U_F \subset Y-W$．故$\mathfrak{M}_F \in \Sigma(F)$．$\bigcup \{\mathfrak{M}_F : F \in \mathscr{G}\} \supset \mathscr{G}$．因$\mathscr{G}$是$\mathscr{C}$紧集，故有$F_1, F_2, \cdots, F_m$使$\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_{F_i} \supset \mathscr{G}$．设$K' = \bigcap_{i=1}^{n} K_{F_i}$．则若$F \in \mathscr{G}$，$F(K') \subset (Y-W)$．故$K' \cap [\bigcup\{F^-(W) : F \in \mathscr{G}\}] = \phi$．故$K' \cap S' = \phi$．令$V' = \bigcap_{i=1}^{n} V_{F_i}$，则$V' \in \Sigma(x)$，$V' \cap K'$，故$V' \cap S' \subset K' \cap S' = \phi$．故$x \notin S'$．即$\overline{S}'$为闭集．

因Z为K空间，K为X的任意闭紧集，且〔$\bigcup\{F^+(W) : F \in \mathscr{G}\}$〕$\cap K$及〔$\bigcup\{F^-(W) : F \in \mathscr{G}\}$〕当$W$为闭集时恒为闭集，故$\bigcup\{F^+(W) : F \in \mathscr{G}\}$及$\bigcup\{F^-(W) : F \in \mathscr{G}\}$皆为闭集．由引理2知$\mathscr{G}$满足性质a．c 成立．

参 考 文 献

〔1〕V. J. Mancuso, J. Aust. Math. Soc., 12.（1971）466-472.

〔2〕G. Fox and P. Morales, Pac. J. Math., Vol.60, No.1,（1975）75—79.

〔3〕G. Fox and P. Morales, Pac. J. Math. Vol. 64, No.1,（1976）137—143.

〔4〕E. Michael, Trans. Amer. Math. Soc., 71,（1951）152—182.

〔5〕方嘉琳，四川大学学报4，（1964），81—89.

〔6〕方嘉琳，傅沛仁，吉林师大学报，2，（1964）41—46.

〔7〕方嘉琳，四平师范学院，创刊号，（1979），3—8.

Compactness of Set-Valued Mapping Family

Fang Jialin

(Liaoning Normal University, Dalian)

Abstracts

The classical theorem of Ascoli asserts that a uniformly bounded, equicontinuous family of functions has a compact closure in the space of continuous functions with the topology of uniform convergence.

The theorem is very important in analytic theory, for example it is ever used in the theories of differential equation, integral equation, calculus of variations,

conformal mapping. Many people have extended it to some kinds of general form in the several decades. Because of the difference of mapping family and the difference of topological structure of mapping sace, the form is different.

The purpose of this paper is to improve the Gale-type multifunction Ascoli theorem of Mancuso [1]. The main results of this paper are:

Theorem Let $\mathscr{F}$ be a family of point-compact continuous multifunctions on a K-space X to a T_1 regular Y, $(\mathscr{F}, \mathscr{C})$ is compact iff $\mathscr{F}$ satisfies conditions.

a. $\mathscr{F}$ is closed in point-compact multifunctions for compact open topology

b. $\mathscr{F}[x]$ is compact for all $x \in X$.

c. for each $\mathscr{C}$ closed subset $\mathscr{F}_o$ of $\mathscr{F}$, the $\bigcap\{F^+(G): F \in \mathscr{F}_o\}$ and $\bigcap\{F^-(G): F \in \mathscr{F}_o\}$ are open in X whenever G is open in Y.